ریاضی مهندسی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد زنجان

تهیه و تنظیم: مهدی اسدی

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشنیازها

۱.۱ تعریف‌ها

در ابتدا مروری به فرمولهای مهم و ساده از درس ریاضیات عمومی خواهیم داشت

$$\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n.$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin p \cos q = \frac{1}{2}(\sin(p+q) + \sin(p-q))$$

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2}(\cos(p-q) - \cos(p+q))$$

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2}(\cos(p+q) + \cos(p-q))$$

برای محاسبه

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx$$

از فرمولهای تبدیل حاصل ضرب به حاصل جمع استفاده می‌کنیم.

۲.۱ حل بعضی از مثال‌ها بر اساس دستور جز به جز

برای حل انتگرال‌های زیر بهتر است از روش جدولی جز به جز استفاده نمائیم

$$\int p_n(x)e^{ax}dx, \quad \int p_n(x)\sin axdx, \quad \int p_n(x)\cos axdx,$$

که در آن‌ها $p_n(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n هست.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$\int$	$+$	d	$\int$
	-	u	dv
	$+$	du	v
			v

1. $I = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

$+$	d	$\int$
-	x^2	e^x
$+$	$2x$	e^x
-	2	e^x
$+$	0	e^x

2. $I = \int (7-3x)\, e^{6x} dx = (7-3x)\left(\frac{1}{6}e^{6x}\right) + \frac{1}{12}e^{6x} + C$

$+$	d	$\int$
-	$7-3x$	e^{6x}
$+$	-3	$\frac{1}{6}e^{6x}$
-	0	$\frac{1}{36}e^{6x}$

3. $I = \int \left(x^2+2x+1\right)\sin 7xdx = \left(x^2+2x+1\right)\left(\frac{-1}{7}\cos 7x\right) + (2x+2)\left(\frac{1}{49}\sin 7x\right) + \frac{2}{343}\cos 7x + C$

+	d	$\int$
-	x^2+2x+1	$\sin 7x$
+	$2x+2$	$\frac{-1}{7}\cos 7x$
-	2	$\frac{-1}{7^2}\sin 7x$
+	0	$\frac{1}{7^3}\cos 7x$

مثال ۱.۲.۱. نشان دهید

۱. $I=\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}(a\cos bx+b\sin bx)+C$

۲. $I=\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

راهنمایی فرض کنید

$$A=\int e^{ax}\cos bx dx \quad B=\int e^{ax}\sin bx dx$$

سپس $A+iB$ را محاسبه نمائید.

تعریف ۲.۲.۱. تابع f را متناوب گوییم هرگاه عددی مانند T موجود باشد،به طوری که به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم:

$$x+T\in D_f \quad f(x+T)=f(x).$$

به کوچکترین عدد مثبت T که در رابطه بالا صدق کند، دوره تناوب اصلی تابع f گویند.

تبصره ۳.۲.۱. مهمترین توابع متناوب ،تابع های مثلثاتی هستند، از جمله $\sin ax$ و$\cos ax$ که دوره تناوب آنها $\frac{۲\pi}{|a|}$ می باشد.

مثال ۴.۲.۱. تابع متناوب $f(x)=x,\ -\pi<x<\pi$ با دوره تناوب $T=۲\pi$ را رسم کنید.

هر تابع متناوب لزوما دارای دوره تناوب اصلی نیست. به عنوان مثال تابع ثابت دارای بی‌نهایت دوره تناوب هست ولی دوره تناوب اصلی ندارد.

تعریف ۵.۲.۱. تابع f را زوج گویند هرگاه دامنه آن متقارن باشد وبه ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم

$$f(-x) = f(x).$$

تعریف ۶.۲.۱. تابع f را فرد گویند هر گاه دامنه آن دامنه متقارن باشد و به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم

$$f(-x) = -f(x).$$

تبصره ۷.۲.۱. روابط زیر بین جمع و تفریق و ضرب توابع زوج و فرد برقرار است.

۱. حاصل ضرب تابع زوج در تابع زوج، یک زوج است.

۲. حاصل ضرب تابع فرد در تابع فرد، یک زوج است.

۳. حاصل ضرب تابع زوج در تابع فرد، یک فرد است.

۴. حاصل جمع و تفریق دو تابع زوج، یک زوج است.

۵. حاصل جمع و تفریق دو تابع فرد، یک فرد است.

۶. حاصل جمع و تفریق یک تابع زوج و یک تایع فرد، نه زوج و نه فرد است.

در بدست آوردن سری فوریه توابع زوج و فرد از تمرینات زیر نیز استفاده خواهیم کرد.

۳.۱ تمرین

۱. اگر $f(x)$ متناوب با دوره تناوب T باشد نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{Z}$، nT نیز دوره تناوب آن هست.

۲. اگر $f(x)$ متناوب با دوره تناوب T باشد نشان دهید:

$$\int_{-T} 0^T f(x)dx = \int_0^{2T} f(x)dx = \int_T^3 f(x)dx = \cdots .$$

۳. ثابت کنید برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ و غیر صفر داریم:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx.$$

۴. اگر $f(x)$ متناوب با دوره تناوب T و f در فاصله $[۰, T]$ مشتق پذیر باشد نشان دهید f' نیز متناوب است.

۵. اگر f تابعی زوج بر $[-a,a]$ باشد نشان دهید: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۲\int_{۰}^{a} f(x)dx$

۶. اگر f تابعی فرد بر $[-a,a]$ باشد نشان دهید: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۰$

۷. نشان دهید هر تابع را می‌توان بصورت مجموع یک تابع زوج و فرد نوشت.[۱]

۸. نشان دهید تابع ثابت صفر تنها تابعی است که هم زوج و هم فرد است.

تعریف ۱.۳.۱. تابع f را در بازه (a,b) تکه ای پیوسته (قطعه ای پیوسته) گویند هرگاه تعداد نقاط ناپیوستگی تابع f در این فاصله متناهی بوده و در هر نقطه ناپیوستگی، حد چپ و راست موجود باشد.

تعریف ۲.۳.۱. تابع f تکه ای هموار در باز ه ی (a,b) تکه ای هموار گویند هرگاهf و f' در بازه ی (a,b) تکه ای پیوسته باشند.

تعریف ۳.۳.۱. تابع f مطلقا انتگرال پذیرگویند هرگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty,$$

موجود و متناهی شود.

مثال ۴.۳.۱. نشان دهید تایع زیر مطلقا انتگرال پذیر است

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} + \sin x, & |x| < \pi \\ ۰, & |x| > \pi \end{cases}$$

تعریف ۵.۳.۱. توابع $\{f_۱(x), f_۲(x), \cdots, f_n(x), \cdots\}$ در بازه $[a,b]$ متعامد گویند هرگاه داشته باشیم

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x)dx = 0, \quad \forall m \neq n.$$

مثال ۶.۳.۱. توابع $\{\sin x, \sin ۲x, \sin ۳x, \cdots\}$ در بازه $[۰, ۲\pi]$ یا $[-\pi, \pi]$ متعامد هستند.

[۱] $f(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{۲} + \frac{f(x)+f(-x)}{۲}$

مثال ۷.۳.۱. توابع $\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cdots\}$ در بازه $[0, 2\pi]$ یا $[-\pi, \pi]$ متعامد هستند.

مثال ۸.۳.۱. توابع $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\}$ در بازه $[0, 2\pi]$ یا $[-\pi, \pi]$ متعامد هستند.

مثال ۹.۳.۱. توابع $\{\sin \frac{\pi x}{\ell}, \sin \frac{2\pi x}{\ell}, \sin \frac{3\pi x}{\ell}, \cdots\}$ در بازه $[-\ell, \ell]$ یا $[0, 2\ell]$ متعامد هستند.

مثال ۱۰.۳.۱. توابع $\{1 \cos \frac{\pi x}{\ell}, \cos \frac{2\pi x}{\ell}, \cos \frac{3\pi x}{\ell}, \cdots\}$ در بازه $[-\ell, \ell]$ یا $[0, 2\ell]$ متعامد هستند.

۴.۱ تمرین

۱. نشان دهید برای هر $m \neq n$ داریم:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = 0.$$

۲. نشان دهید برای هر $m \neq n$ داریم:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0.$$

۳. نشان دهید برای هر m, n داریم:

$$\int_0^{2\ell} \cos \frac{m\pi}{\ell} x \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = 0.$$

۴.

$$\int_0^{2\ell} \cos \frac{m\pi}{\ell} x \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \ell, & m = n \end{cases}$$

۵.

$$\int_0^{2\ell} \sin \frac{m\pi}{\ell} x \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \ell, & m = n \end{cases}$$

۶. نشان دهید در معادله دیفرانسیل لژاندر $(۱ - x^۲)y'' - ۲xy' + n(n + ۱)y = ۰$ چند جمله‌ایهای لژاندر برهم عمودند[۲] یعنی:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} ۰, & m \neq n \\ \frac{۲}{۲n+۱}, & m = n \end{cases}$$

همچنین مطلوب است محاسبه ضرایب a_n در سری $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n P_n(x)$.[۳]

[۲] Orthogonal

[۳] $a_n = \frac{۲n + ۱}{۲} \int_{-۱}^{۱} f(x)P_n(x)dx$

فصل ۲

سری فوریه

متولد ۲۱ مارس ۱۷۶۸، اوسر ، فرانسه

مرگ ۱۶ مه ۱۸۳۰، پاریس ، فرانسه

رشته فعالیت ریاضیات، فیزیک و تاریخ

استاد راهنما ژوزف لویی لاگرانژ

دلیل شهرت سری فوریه: تبدیل فوریه، آنالیز فوریه

۱.۲ مقدمه ، تاریخچه

ژان باپتیست ژوزف فوریه (متولد ۲۱ مارس ۱۷۶۸ در اوسر؛ درگذشته ۱۶ مه ۱۸۳۰ در پاریس)، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان فرانسوی. پدر فوریه به خیاطی اشتغال داشت و زمانی که وی هشت سال بیشتر نداشت، از دنیا رفت. فوریه در مدرسه نظامیِ زادگاه‌اش شروع به تحصیل کرد. او در ۱۸ سالگیش در همین دانشگاه به تدریس ریاضی مشغول شد و با به وقوع پیوست انقلاب فرانسه از آن حمایت کرد. در دوران ترور مدتی به زندان افتاد، اما بعدا در سال۱۷۹۵ آزاد شد و به استخدام اکول نرمال سوپریور درآمد. وی از سال ۱۷۹۷ به عنوان جانشین لاگرانژ در اکول پلی‌تکنیک به تدریس مشغول شد. فوریه اواخر قرن هجدهم، ناپلئون بناپارت را در لشکرکشی به مصر همراهی می‌کرد . وی در مصر به عنوان فرماندار مصر سفلی و نیز دبیر بنیاد مصرشناسی مشغول بود. پس از بازگشت فوریه از مصر، در سال ۱۸۰۱ او به عنوان فرماندار ایزر (Isère) منصوب شد و در سال ۱۸۰۸ به لقب بارون دست یافت. از سال ۱۸۲۲ و تا پایان عمرش در سمت دبیر دائمی فرهنگستان علوم فرانسه قرار داشت. فوریه در زمینه فیزیک بر روی انتقال گرما تحقیق می‌کرد و قانون فوریه در این زمینه از او به جای مانده‌است. فوریه همچنین کاربردهای سری فوریه در زمینه انتقال گرما و نیز ارتعاشات را معرفی کرد. فوریه در سال ۱۸۳۰ و در ۶۲سالگی از دنیا رفت. جسد وی در گورستان پر–لاشز دفن شده است. فوریه یکی از ۷۲ نفر فرانسوی است که نام آنها بر روی برج ایفل حک شده است.

در اوایل قرن هیجدهم، ریاضیدان، مهندس و فیزیکدان فرانسوی جان باپتیست ژوزف فوریه کشف خارقالعاده‌ای را به ارمغان آورد. فوریه در نتیجه تحقیقاتش بر روی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای که ارتعاشات و انتشار گرما در اجسام را مدلسازی می نمود، ادعا داشت که هر تابعی را میتوان توسط یک سری بینهایت از توابع مثلثاتی ابتدایی مانند سینوسها و کسینوسها معرفی نمود. برای مثال، صدای حاصل از یک آلت موسیقی مانند پیانو، ویولن یا رامپت، تجزیه سیگنالها به تشکیل دهنده‌های مثلثاتی آنها که فرکانسهای بنیادی را آشکار می سازد (یعنی آهنگ و فراز نواخت یا پژواک) از کاربردهای مهم سری فوریه میباشند.

ادعای فوریه آنقدر غیر قابل پیش بینی و شگفت انگیز بود که بسیاری از ریاضیدانان برجسته وقت به آن اعتقادی نداشتند. در عین حال، دیری نپائید که دانشمندانان به تحسین توانایی و گستردگی کاربرد روش فوریه زبان گشودند که سرآغاز فتح قلمروهای گوناگون فیزیک، مهندسی و تحلیلهای ریاضی گردید. تحلیل فوریه یکی از اجزاء بنیادین بسیاری از ریاضیات کاربردی مدرن محسوب میگردد. این سری، در حقیقت، یک وسیله تحلیلی استثنائی برای حل طیف وسیعی از معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی را فراهم میسازد. کاربردهای آن در ریاضیات محض، فیزیک و مهندسی آنقدر گسترده میباشد که آنها را نمی توان لیست نمود. به جرأت می توان ادعا نمود که در فرآیند کاری و

تحقیقاتی یک ریاضیدان، فیزیکدان و یا مهندس، یادگیری تئوری فوریه، همانند حسابگان و جبر خطی، امری اجتناب ناپذیر میباشد و مطمئناً آنها به این نتیجه خواهند رسید که سری فوریه یکی از اصلی ترین اسلحه‌ها در زرادخانه یک ریاضیدان یا یک دانش‌پژوه مهندسی می‌باشد.

۱.۱.۲ چرا ملزم به استفاده از سری فوریه هستیم

۱. سری فوریه همانند سری تیلور، جهت برآورد استفاده میشود. از مزایای سری فوریه نسبت به سری تیلور، قابل استفاده بودن این سری برای تمام نقاط حوزه تعریف تابع مورد نظر میباشد. در صورتی که سری تیلور تنها حول یک نقطه مشخص از دامنه تابع (که سری بر اساس آن نقطه نوشته شده است). معتبر میباشد بر خلاف سری تیلور که به واسطه چند جملهایها بیان میشود، سری فوریه بر حسب ترکیب خطی از توابع مثلثاتی سینوسی و کسینوسی بسط داده میشود.

۲. سری فوریه از ابزار سودمند جهت حل معادلات مشتقات جزئی [۱] میباشد.

۳. جملات سری فوریه عموماً دارای تفسیر فیزیکی میباشند. برای مثال در سیستم ارتعاشاتی مکانیکی، هر یک از اجزای سری فوریهای که بیانگر این ارتعاش کلی است، نشانگر مودهای اصلی این ارتعاش میباشد. سری فوریه کامل در حل این مسئله، نشان دهنده میزان تاثیر هر مود و تشخیص مودهای اساسی و تعیین کننده در سیستم مورد نظر میباشد. این اطلاعات میتوانند راهنمای مناسبی برای نحوه به کارگیری مودهای ارتعاشی مورد نظر جهت حاصل شدن نتیجه مطلوب در سیستم باشند.

۲.۲ سری فوریه

در ریاضیات، سری فوریه[۲]، تابعی است که با استفاده از آن می توان هر تابع متناوب را به صورت جمعی از توابع نوسانی ساده(سینوسی، کسینوسی و یا تابع نمایی مختلط) نوشت.این تابع به نام ریاضیدان بزرگ فرانسوی، ژوزف فوریه نامگذاری شده است. با بسط هر تابع به صورت سری فوریه، مولفه های بسامدی آن تابع به دست می آید.
تابع تکه پیوسته f بر $(-\ell,\ell)$ را با دوره تناوب ۲ℓ را در نظر بگیرید. گوئیم آیا یک سری از توابع مثلثاتی می‌توان

[۱] PDE

[۲] Fourier Series

یافت به گونه‌ای که به تابع f بطور یکنواخت همگرا باشد.

فرض کنید این سری به‌فرم

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x) \tag{۱.۲}$$

باشد. اکنون با انتگرالگیری از رابطه (۱.۲) داریم

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{2}a_0 dx + \int_{-\ell}^{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x)dx \tag{۲.۲}$$

با توجه به همگرایی یکنواخت یا تقارب متشابه داریم

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{2}a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty}(\int_{-\ell}^{\ell} a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}xdx + \int_{-\ell}^{\ell} b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}xdx) \tag{۳.۲}$$

حال با توجه به تعامد

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \frac{1}{\ell}a_0(2\ell)$$

و یا

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx. \tag{۴.۲}$$

این بار طرفین رابطه (۱.۲) یکبار در $\cos\frac{m\pi}{\ell}x$ و بار دیگر در $\sin\frac{m\pi}{\ell}x$ ضرب کنید تا با توجه به تعامد ضرایب a_n و b_n نیز بصورت زیر بدست آیند

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx, \quad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx \quad n \in \mathbb{N}. \tag{۵.۲}$$

تعریف ۱.۲.۲. در حالتی که سری همگرا به $f(x)$ و ضرایب از روابط (۴.۲ و ۵.۲) بدست آیند به سری (۱.۲) سری فوریه $f(x)$ و به a_0 و a_n, b_n ضرایب سری فوریه $f(x)$ می‌گویند.

تابع تکه پیوسته f بر $(-\ell, \ell)$ را با دوره تناوب 2ℓ را در نظر بگیرید. سری زیر را با ضرایب (۴.۲ و ۵.۲) در نظر بگیرید.

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x) \tag{۶.۲}$$

گوئیم چنین سری بدست آمده آیا به $f(x)$ همگراست یا خیر؟ در این حالت جواب معلوم نیست. چه بسا که ممکن است سری کلا واگرا باشد که خود به خود مسئله منتفی است، یا حتی سری همگرا باشد ولی نه به $f(x)$، پس در این حالت

$$f(x) \simeq \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x)$$

را سری فوریه متناظر با $f(x)$ می‌نامیم.

مثال ۲.۲.۲. مطلوب محاسبه سری فوریه متناظر با تابع

$$f(x)=\begin{cases} 1, & -\ell<x<0 \\ 0, & 0<x<\ell \end{cases}$$

جواب: $a_0=1, a_n=0, b_n=\frac{\cos(n\pi)-1}{n\pi}$.

مثال ۳.۲.۲. مطلوب محاسبه سری فوریه متناظر با تابع

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x<0 \\ x, & 0<x<\pi \end{cases}$$

جواب: $a_0=\frac{\pi}{2}, a_n=\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi}, b_n=\frac{-\cos(n\pi)}{n}$.

۳.۲ سری فوریه تابع زوج و فرد

فرض کنید f تابع تکه پیوسته بر $(-\ell,\ell)$ و متناوب با دوره تناوب 2ℓ و تابعی زوج باشد، در این صورت بنا به ضرایب فوریه از روابط (۴.۲ و ۵.۲)، تبصره (۷.۲.۱) و تمرینات بخش (۳.۱) داریم

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx \quad n\in\mathbb{N}. \\ b_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=0 \quad n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

فرض کنید f تابع تکه پیوسته بر $(-\ell,\ell)$ و متناوب با دوره تناوب 2ℓ و تابعی فرد باشد، در این صورت بنا به ضرایب فوریه از روابط (۴.۲ و ۵.۲)، تبصره (۷.۲.۱) و تمرینات بخش (۳.۱) داریم

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx=0 \\ a_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx=0 \quad n\in\mathbb{N}. \\ b_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx \quad n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

مثال ۱.۳.۲. مطلوب محاسبه سری فوریه متناظر با تابع

$$f(x)=\begin{cases} -1, & -2<x<0 \\ 1, & 0<x<2 \end{cases}$$

مثال ۲.۳.۲. سری فوریه متناظر با تابع $f(x) = e^{3x}$ در بازه $(-1, 1)$ بدست آورید. دقت کنید که این تابع نه زوج است و نه فرد.

مثال ۳.۳.۲. سری فوریه متناظر با تابع $f(x) = |\sin x|$ در بازه $(0, 2\pi)$ بدست آورید.

نکته مهمی که اینجا مطرح می‌شود این است که آیا مقدار سری فوریه در هر نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است یا خیر.

قضیه ۴.۳.۲. **دیریکله** اگر f پیوسته در x_0 باشد آنگاه

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x) = f(x_0)$$

و اگر f پیوسته نباشد آنگاه

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

مثال ۵.۳.۲. مطلوب محاسبه سری فوریه متناظر با تابع

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

با فرض $x = \frac{\pi}{2}$ نشان دهید

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

مثال ۶.۳.۲. سری فوریه متناظر با تابع $f(x) = x^2$ در بازه $[-\pi, \pi]$ بدست آورید. با فرض $x = \pi$ نشان دهید

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

همین طور نشان دهید

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

با توجه به سری فوریه متناظر تابع f می‌توان سری فوریه‌ای برای مشتق و انتگرال بفرم زیر برای تابع f بدست آورد.

قضیه ۷.۳.۲. فرض کنید f تابعی پیوسته، متناوب در $[-\ell, \ell]$ و $f(-\ell) = f(\ell)$ و f' تابعی تکه‌ای پیوسته بر $(-\ell, \ell)$ باشد در این صورت با مشتق گیری جمله به جمله از سری فوریه متناظر f می‌توان سری فوریه متناظر f' را بدست آورد بطوریکه اگر f' پیوسته در x_0 باشد آنگاه مقدار سری برابر با $f'(x_0)$ و اگر f پیوسته نباشد آنگاه برابر با

$$\frac{f'(x_0^+) + f'(x_0^-)}{2}$$

است.

مثال ۸.۳.۲. ابتدا سری فوریه متناظر با تابع $f(x)=|x|$ در بازه $[-۱,۱]$ بدست آورید. سپس با مشتق گیری از آن و اینکه $f'(\frac{۱}{۲})=۱$ نشان دهید
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

قضیه ۹.۳.۲. فرض کنید f تابعی تکه‌ای پیوسته، متناوب در $[-\ell,\ell]$ باشد در این صورت با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری فوریه متناظر f می‌توان سری فوریه متناظر $\int f(x)dx$ را بدست آورد.

مثال ۱۰.۳.۲. ابتدا سری فوریه متناظر با تابع
$$f(x)=\begin{cases} ۱+۲x, & -۱\le x\le ۰\\ ۱-۲x, & ۰\le x\le ۱\end{cases}$$
در بازه $[-۱,۱]$ بدست آورید. سپس با انتگرال گیری از آن و اینکه $\int f(x)dx=F(\frac{۱}{۲})$ نشان دهید
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

۴.۲ تمرین

۱. سری فوریه تابع $f(x)=x-x^{۲},\ -\pi<x<\pi$ با دوره تناوب $T=۲\pi$ رابیابید.

۲. سری فوریه تابع $f(x)=x+\sin x,\ -\pi<x<\pi$ با دوره تناوب $T=۲\pi$ رابیابید.

۳. سری فوریه تابع $f(x)=|x|,\ -\pi<x<\pi$ با دوره تناوب $T=۲\pi$ رابیابید.

۴. برای تابع $f(x)=e^{۲x},\ ۰\le x\le ۱$ سری فوریه کسینوسی را بدست آورید.

۵. برای تابع $f(x)=e^{۲x},\ ۰\le x\le ۱$ سری فوریه سینوسی را بدست آورید.

۶. برای تابع $f(x)=\sin x,\ ۰\le x\le\pi$ سری فوریه کسینوسی را بدست آورید.

۷. سری فوریه تابع $f(x) = x^{۲}, \quad -\pi < x < \pi$ رابیابید. سپس مقادیر هر یک از سریهای عددی زیر را بدست آورید

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots, \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots .$$

۸. سری فوریه تابع زیر را بیابید:

$$f(x) = \begin{cases} ۱ + \frac{۲}{\pi}x, & -\pi \leq x < ۰ \\ ۱ - \frac{۲}{\pi}x, & ۰ \leq x \leq \pi \end{cases}$$

۹. سری فوریه تابع زیر را بیابید:

$$f(x) = \begin{cases} -۱, & -۱ \leq x < ۰ \\ ۱, & ۰ < x \leq ۱ \end{cases}$$

۵.۲ بسط نیم دامنه‌ای توابع

اکنون در نظر بگیرید که ممکن است تابع f متناوب نباشد. می‌خواهیم نشان دهیم با توسیع آن بصورت زوج و فرد می‌توان سری فوریه متناظرش را بدست آورد.

۱.۵.۲ بسط نیم دامنه‌ای توابع بصورت زوج

فرض کنید f تابعی تعریف شده بر $۰ < x < \ell$ باشد با تعریف f^* بفرم زیر

$$f^*(x) = \begin{cases} f(-x), & -\ell < x < ۰ \\ f(x), & ۰ < x < \ell \end{cases}$$

f^* تابعی زوج با دوره تناوب $T = ۲\ell$ است. پس $b_n = ۰$ و

$$\begin{aligned} a_۰ &= \frac{۲}{\ell}\int_۰^\ell f^*(x)dx = \frac{۲}{\ell}\int_۰^\ell f(x)dx \\ a_n &= \frac{۲}{\ell}\int_۰^\ell f^*(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx = \frac{۲}{\ell}\int_۰^\ell f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

لذا با جایگذاری

$$f^*(x) \simeq \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x$$

حال در فاصله $\circ < x < \ell$ داریم $f^*(x) = f(x)$، پس

$$f(x) \simeq \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x$$

که آنرا بسط نیم دامنه‌ای کسینوسی f بر $\circ < x < \ell$ می‌نامند.

۲.۵.۲ بسط نیم دامنه‌ای توابع بصورت فرد

فرض کنید f تابعی تعریف شده بر $\circ < x < \ell$ باشد با تعریف f^* بفرم زیر

$$f^*(x) = \begin{cases} -f(-x), & -\ell < x < \circ \\ f(x), & \circ < x < \ell \end{cases}$$

f^* تابعی فرد با دوره تناوب $T = ۲\ell$ است. پس $a_n = a_\circ = \circ$ و

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f^*(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

لذا با جایگذاری

$$f^*(x) \simeq +\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

حال در فاصله $\circ < x < \ell$ داریم $f^*(x) = f(x)$، پس

$$f(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

که آنرا بسط نیم دامنه‌ای سینوسی f بر $\circ < x < \ell$ می‌نامند.

مثال ۱.۵.۲. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} ۱, & \circ < x < \frac{\ell}{۲} \\ \frac{۱}{۲}, & \frac{\ell}{۲} < x < \ell \end{cases}$$

این تابع را هم بصورت زوج و هم بصورت فرد توسیع داده و توسیع نیم دامنه‌ای سینوسی و کسینوسی آنرا بیابید.

۶.۲ تمرین

۱. بسط نیم دامنه‌ای کسینوسی هر یک از توابع زیر را بدست آورید و توسیع و نمودار آنرا رسم کنید:

(الف) $f(x) = ۱, \quad \circ < x < \ell$

$f(x) = 1 - \frac{x}{\ell}, \quad 0 < x < \ell$ (ب)

$f(x) = x, \quad 0 < x < \ell$ (ج)

$f(x) = e^x, \quad 0 < x < \ell$ (د)

$f(x) = \sin\frac{\pi x}{\ell}, \quad 0 < x < \ell$ (ه)

$f(x) = \sin\frac{\pi x}{2\ell}, \quad 0 < x < \ell$ (و)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\ell}{2} \\ 0, & \frac{\ell}{2} < x < \ell \end{cases}$$ (ز)

۲. بسط نیم دامنه‌ای سینوسی هر یک از توابع زیر را بدست آورید و توسیع و نمودار آنرا رسم کنید:

$f(x) = 1, \quad 0 < x < \ell$ (الف)

$f(x) = x, \quad 0 < x < \ell$ (ب)

$f(x) = x^2, \quad 0 < x < \ell$ (ج)

$f(x) = x^3, \quad 0 < x < \ell$ (د)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\ell}{2} \\ 0, & \frac{\ell}{2} < x < \ell \end{cases}$$ (ه)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < \frac{\ell}{2} \\ \frac{3}{2}, & \frac{\ell}{2} < x < \ell \end{cases}$$ (و)

۷.۲ اتحاد پارسوال

توابع تکه‌ای پیوسته f و g بر $(-\ell, \ell)$ را با دوره تناوب 2ℓ در نظر بگیرید. در این صورت

$$f(x) \simeq \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x) \tag{۷.۲}$$

$$g(x) \simeq \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + \beta_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x) \tag{۸.۲}$$

که در این روابط ضرائب از رابطه‌های مشابه برای f و g از روابط (۴.۲ و ۵.۲) تبعیت می‌کنند. با ضرب رابطه (۷.۲) در $g(x)$ و سپس انتگرال گیری از $-\ell$ تا ℓ داریم

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)g(x)dx \simeq \frac{1}{2}a_0 \int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_{-\ell}^{\ell} g(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx + b_n \int_{-\ell}^{\ell} g(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx)$$

و یا

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}a_0(\alpha_0\ell) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n\ell + b_n\beta_n\ell)$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

در حالت خاص اگر $f(x) = g(x)$ باشد خواهیم داشت

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f^2(x)dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

که به اتحاد پارسوال[۳] مشهور است.

مثال ۱.۷.۲. اتحاد پارسوال را در مورد تابع زیر بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} ۲, & -\ell < x < ۰ \\ -۱, & ۰ < x < \ell \end{cases}$$

توجه داریم که f نه زوج است و نه فرد. پس خواهیم داشت

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{3}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1),$$

پس سری فوریه متناظر عبارتست از

$$f(x) \simeq \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1)\sin\frac{n\pi}{\ell}x).$$

اکنون بنا بر اتحاد پارسوال داریم

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f^2(x)dx = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - 1)^2.$$

از طرفی دیگر

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f^2(x)dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{0} f^2(x)dx + \frac{1}{\ell}\int_{0}^{\ell} f^2(x)dx$$

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f^2(x)dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{0} 4dx + \frac{1}{\ell}\int_{0}^{\ell} (-1)^2dx = 5$$

[۳] Parseval

در نتیجه

$$5=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi)-1)^2.$$

و یا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

۸.۲ سری فوریه مختلط

تابع تکه پیوسته f بر $(-\ell,\ell)$ را با دوره تناوب ۲ℓ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
f(x) &\simeq \frac{۱}{۲}a_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x)\\
&\simeq \frac{۱}{۲}a_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\frac{e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}+e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}}{۲}+b_n\frac{e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}-e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}}{۲i})\\
&\simeq c_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}(c_ne^{i\frac{n\pi}{\ell}x}+k_ne^{-i\frac{n\pi}{\ell}x})
\end{aligned}$$

حال کافیست فرض کنیم

$$c_0=\frac{1}{2}a_0,\quad c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\quad k_n=\frac{a_n+ib_n}{2}$$

اکنون برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{a_n-ib_n}{۲}=\frac{۱}{۲\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx-i\frac{۱}{۲\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=\frac{۱}{۲\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}dx\\
k_n &= \frac{a_n+ib_n}{۲}=\frac{۱}{۲\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx+i\frac{۱}{۲\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=\frac{۱}{۲\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}dx.
\end{aligned}$$

با فرض $k_n=c_{-n}$ نشان میدهیم

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{n\pi}{\ell}x}\quad c_n=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}dx\quad n\in\mathbb{Z}.$$

با فرض $m=-n$ داریم

$$n=1\Rightarrow m=-1,$$

$$n\to\infty\Rightarrow m\to-\infty.$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &\simeq c_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty}(c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} + k_n e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}) \\
&\simeq c_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} + \sum_{n=۱}^{\infty} c_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x} \\
&\simeq c_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} + \sum_{m=-\infty}^{-۱} c_m e^{i\frac{m\pi}{\ell}x} \\
&\simeq c_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} + \sum_{n=-\infty}^{-۱} c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} \\
&\simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}
\end{aligned}
$$

و به همین ترتیب

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{۱}{۲\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x} dx \quad n = ۱, ۲, ۳, \cdots \\
c_{-n} &= k_n = \frac{۱}{۲\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} dx \quad n = ۰, ۱, ۲, ۳, \cdots \\
c_m &= \frac{۱}{۲\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{i\frac{-m\pi}{\ell}x} dx \quad m = ۰, -۱, -۲, -۳, \cdots
\end{aligned}
$$

پس شکل مختلط سری فوریه متناظر f عبارتست از

$$
f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} \quad c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x} dx \quad n \in \mathbb{Z}.
$$

و رابطه بین ضرایب حقیقی و مختلط سری فوریه عبارت تست از

$$
a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})
$$

$$
c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)
$$

مثال ۱.۸.۲. شکل مختلط سری فوریه متناظر $f(x) = e^x$ در بازه $-\pi < x < \pi$ را بدست آورید.

جواب:

$$
c_n = \frac{(-1)^n \sinh\pi}{\pi(1-in)}, a_n = \frac{2(-1)^n \sinh\pi}{\pi(1+n^2)}, b_n = \frac{2n(-1)^n \sinh\pi}{\pi(1+n^2)}, a_0 = \frac{2\sinh\pi}{\pi}
$$

۹.۲ انتگرال فوریه

اگر f تابعی تکه‌ای پیوسته و تکه‌ای هموار در بازه $(\circ,\infty)$ یا $(-\infty,\infty)$ باشد آنگاه بجای سری فوریه، انتگرال فوریه مطرح می‌شود. اکنون بخش رو با چند مثال شروع می‌کنیم.

مثال ۱.۹.۲. در تابع متناوب

$$f_T(x) = \begin{cases} ۱, & |x| < ۱ \\ \circ, & \frac{-T}{۲} < x < -۱,\ ۱ < x < \frac{T}{۲} \end{cases}$$

که $T > ۲$ است، اگر $T \to \infty$ آنگاه به تابع نامتناوب زیر می‌رسیم.

$$\lim_{T\to\infty} f_T(x) = f(x) = \begin{cases} ۱, & |x| < ۱ \\ \circ, & |x| > ۱ \end{cases}$$

تبصره ۲.۹.۲. در واقع هر تابع نامتناوب حد یک تابع متناوبی است که دوره تناوبش به بی‌نهایت میل می‌کند.

مثال ۳.۹.۲. تابع $f_T(x) = e^{-|x|}$ را در بازه $\frac{-T}{۲} < x < \frac{T}{۲}$ در نظر بگیرید، نظیر مثال قبل

$$\lim_{T\to\infty} f_T(x) = e^{-|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

تابع تکه پیوسته f_T را با دوره تناوب $T = ۲\ell$ را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که $\lim_{T\to\infty} f_T(x) = f(x)$.

$$f_T(x) \simeq \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}x) \tag{۹.۲}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(y)dy. \tag{۱۰.۲}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(y)\cos\frac{2n\pi}{T}ydy, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(y)\sin\frac{2n\pi}{T}ydy \quad n \in \mathbb{N}. \tag{۱۱.۲}$$

حال قرار دهید $w_n = \frac{۲n\pi}{T}$ لذا $w_{n-۱} = \frac{۲(n-۱)\pi}{T}$ پس

$$\Delta w = w_n - w_{n-1} = \frac{2\pi}{T}, \quad \frac{2}{T} = \frac{\Delta w}{\pi}.$$

با جایگذاری این روابط در رابطه (۹.۲) داریم

$$\begin{aligned}
f_T(x) &\simeq \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(y)dy \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta w}{\pi}\left(\cos\frac{2n\pi}{T}x\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(y)\cos\frac{2n\pi}{T}ydy+\sin\frac{2n\pi}{T}x\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(y)\sin\frac{2n\pi}{T}ydy\right) \\
&\simeq \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(y)dy \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta w}{\pi}\left(\cos w_n x\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(y)\cos w_n ydy+\sin w_n x\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(y)\sin w_n ydy\right)
\end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$

حال اگر $T \to \infty$ آنگاه $\Delta w \to 0$ اکنون بنا به تعریف انتگرال معین در رابطه (۱۲.۲) و با فرض همگرا بودن $\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|dy$ داریم

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(y)dy=0,$$

و با توجه به $\lim_{T\to\infty} f_T(x)=f(x)$ خواهیم داشت

$$f(x)\simeq\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(w)\cos wx+B(w)\sin wx)dw$$

که آن را انتگرال فوریه متناظر f می‌نامند که در آن

$$A(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cos wydy \qquad B(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\sin wydy.$$

قضیه ۴.۹.۲. تابع تکه پیوسته و تکه‌ای هموار f در بازه $(-\infty,\infty)$ را در نظر بگیرید بطوریکه $\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|dy$ همگرا باشد آنگاه

اگر f پیوسته در x_0 باشد آنگاه

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(w)\cos wx_0+B(w)\sin wx_0)dw=f(x_0)$$

و اگر f پیوسته نباشد آنگاه

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(w)\cos wx_0+B(w)\sin wx_0)dw=\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

مثال ۵.۹.۲. انتگرال فوریه متناظر تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

جواب: $A(w)=\frac{۲\sin w}{w}$ و $B(w)=۰$.

$$f(x)\simeq\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{2\sin w}{w}\cos wx dw=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin w\cos wx}{w}dw$$

لذا

$$\int_0^\infty\frac{\sin w\cos wx}{w}dw=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}, & |x|<۱\\ ۰, & |x|>۱\end{cases}$$

اما در نقاط $x=\pm۱$ بنا به قضیه داریم

$$x=-1\Rightarrow\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin w\cos wx}{w}dw=\frac{f(-1^+)+f(-1^-)}{2}=\frac{1}{2}$$
$$x=1\Rightarrow\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin w\cos wx}{w}dw=\frac{f(1^+)+f(1^-)}{2}=\frac{1}{2}.$$

در نتیجه

$$\int_0^\infty\frac{\sin w\cos wx}{w}dw=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}, & |x|<۱\\ \frac{\pi}{۴}, & x=\pm۱\\ ۰, & |x|>۱\end{cases}$$

مثال ۶.۹.۲. انتگرال فوریه متناظر تابع $f(x)=e^{-|x|}$ را بیابید.

$$\begin{aligned}A(w)&=\int_{-\infty}^\infty f(y)\cos wy dy=۲\int_۰^\infty e^{-y}\cos wy dy=۲L[\cos wy]_{s=۱}=\frac{۲}{۱+w^۲}\\ B(w)&=\int_{-\infty}^\infty f(y)\sin wy dy=۰.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{2}{1+w^2}\cos wx dw=e^{-|x|},\qquad\forall x\in\mathbb{R}.$$

و یا

$$\int_0^\infty\frac{\cos wx}{1+w^2}dw=\frac{\pi}{2}e^{-|x|},\qquad\forall x\in\mathbb{R}.$$

۱.۹.۲ انتگرال فوریه توابع زوج و فرد

(الف) اگر f تابعی تکه‌ای پیوسته و تکه‌ای هموار در بازه $(-\infty,\infty)$ و تابعی زوج باشد آنگاه

$$f(x)\simeq\frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(w)\cos wx dw$$

که در آن

$$A(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos wydy = 2\int_{0}^{\infty} f(y)\cos wydy \quad B(w)=0.$$

(ب) اگر f تابعی تکه‌ای پیوسته و تکه‌ای هموار در بازه $(-\infty,\infty)$ و تابعی فرد باشد آنگاه

$$f(x)\simeq \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} B(w)\sin wxdw$$

که در آن

$$A(w)=0 \quad B(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin wydy = 2\int_{0}^{\infty} f(y)\sin wydy.$$

۲.۹.۲ انتگرال فوریه سینوسی یا کسینوسی - توسیع فرد و زوج

اگر f تابعی تکه‌ای پیوسته و تکه‌ای هموار در بازه $(۰,\infty)$ باشد.

مثال ۲.۹.۷. نشان می‌دهیم نمی‌توان برای تابع $f(x)=۱$ در بازه $(۰,\infty)$ انتگرال فوریه را بدست آورد. زیرا اگر تابع

$$f^*(x)=\begin{cases} ۱, & ۰<x \\ g(x), & x<۰ \end{cases}$$

توسیع آن باشد آنگاه مطلقا انتگرال پذیر نیست چون

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^*(x)|dx = \int_{-\infty}^{0} |g(x)|dx + \int_{0}^{\infty} dx$$

واگراست.

۲.۱۰ تمرین

(الف) با استفاده از انتگرال فوریه روابط زیر را ثابت کنید

$$\text{i. } \int_{0}^{\infty} \frac{\cos wx + w\sin wx}{1+w^2}dw = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{\pi}{2} & x=0 \\ \pi e^{-x}, & 0<x \end{cases}$$

ii. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi w}{w}\sin wx dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x \end{cases}$

iii. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & x = 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$

iv. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi w}{2}\cos wx}{1-w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < |x| \end{cases}$

(ب) توابع زیر را بصورت زوج توسیع داده و انتگرال فوریه آنها را بدست آورید

i. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & a < x \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < a \\ 0, & a < x \end{cases}$

iii. $f(x) = e^{-x} + e^{-2x}, \quad x > 0.$

(ج) توابع زیر را بصورت فرد توسیع داده و انتگرال فوریه آنها را بدست آورید

i. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < a \\ 0, & a < x \end{cases}$

۱۱.۲ انتگرال فوریه مختلط

f تابعی تکه ای پیوسته و مطلقا انتگرال‌پذیر در $(-\infty,\infty)$ باشد آنگاه

$$f(x) \simeq \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (A(w)\cos wx + B(w)\sin wx)dw$$

که در آن

$$A(w) = \int_{-\infty}^\infty f(y)\cos wy dy \quad B(w) = \int_{-\infty}^\infty f(y)\sin wy dy.$$

با جایگذاری این روابط در انتگرال فوریه

$$f(x) \simeq \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(y)\cos wy \cos wx dy + \int_{-\infty}^\infty f(y)\sin wy \sin wx dy\right) dw$$

و یا

$$f(x) \simeq \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(y)\left(\cos wy\cos wx + \sin wy \sin wx\right) dydw$$

$$f(x) \simeq \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(y)\cos(wx - wy)dy\right) dw$$

اکنون با توجه زوج بودن تابع

$$\varphi(w) = \int_{-\infty}^\infty f(y)\cos(wx-wy)dy$$

داریم

$$f(x) \simeq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(y)\cos(wx - wy)dy\right) dw \qquad (۱۳.۲)$$

دوباره با توجه فرد بودن تابع

$$\psi(w) = \int_{-\infty}^\infty f(y)\sin(wx-wy)dy$$

داریم

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(y)\sin(wx - wy)dy\right) dw = 0 \qquad (۱۴.۲)$$

با روابط (۱۳.۲) و (۱۴.۲) داریم

$$f(x) \simeq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(y)e^{iw(x-y)}dy\right) dw$$

که آن را شکل مختلط انتگرال فوریه متناظر f می‌نامند.

۱.۱۱.۲ رابطه بین ضرائب

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(w) e^{iwx} dw, \quad C(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$$

$$A(w) = C(w) + C(-w), \quad B(w) = i(C(w) - C(-w))$$

۱۲.۲ تبدیل فوریه

تبدیل فوریه و به همراه آن آنالیز فوریه، در مباحث مختلف فیزیک، از جمله الکترونیک والکترومغناطیس (به خصوص در پیغام‌رسانی و مخابرات)، آکوستیک، فیزیک امواج و غیره کاربرد فراوان دارد.

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iwy} dy \right) dw$$

طبق تعریف

$$\mathcal{F}_f(w) = \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iwy} dy$$

را تبدیل فوریه f می‌نامند. و

$$\mathcal{F}_f^{-1}(x) = \check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw$$

را تبدیل فوریه وارون f می‌گویند.

خواص تبدیل فوریه

(الف) تبدیل فوریه یک تبدیل خطی است، یعنی برای اعداد ثابت a, b و توابع f, g داریم

$$\mathcal{F}_{af \pm bg} = a\mathcal{F}_f \pm b\mathcal{F}_g.$$

(ب) اگر $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = ۰, \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = ۰$ آنگاه

$$\mathcal{F}_{f^{(n)}} = (iw)^n \mathcal{F}_f.$$

مثال ۱.۱۲.۲. تبدیل فوریه تابع زیر را در بدست آورید

$$f(x) = \begin{cases} ۱, & |x| < ۱ \\ ۰, & ۱ < |x| \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-iwy} dy = \frac{-iw\sqrt{2\pi}}{e^{-iwy}} |_{-1}^{1} = \frac{2\sin w}{w\sqrt{2\pi}}.$$

مثال ۲.۱۲.۲. نشان دهید $\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{۲}$. اما با استفاده از تبدیل فوریه وارون

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}_{\mathcal{F}}^{-۱} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۲\sin w}{w\sqrt{۲\pi}} e^{iwx} dw \\ &= \frac{۱}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{w} e^{iwx} dw \\ &= \begin{cases} ۱, & |x| < ۱ \\ ۰, & ۱ < |x| \end{cases} \end{aligned}$$

حال داریم

$$1 = f(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw$$

و چون تابع $\frac{\sin w}{w}$ زوج است پس

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{2}.$$

فصل ۳

معادلات با مشتقات نسبی

تعریف ۳.۰.۳. هر معادله ای که شامل مشتقات نسبی یک تابع مجهول نسبت به دو یا چند متغیر مستقل باشد معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی نامیده می‌شود.

فرض کنید

$$z_x = p, \quad z_y = q, \quad z_{xx} = r, \quad z_{xy} = s, \quad z_{yy} = t$$

۱.۳ نحوه نوشتن معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی

فرض کنید

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0, \tag{۱.۳}$$

φ تابعی از z و z تابعی از x, y باشد در اینصورت

$$\varphi_z z_x + \varphi_x = 0, \quad \varphi_z z_y + \varphi_y = 0,$$

$$\varphi_z p + \varphi_x = 0, \quad \varphi_z q + \varphi_y = 0, \tag{۲.۳}$$

با حذف a, b از روابط ۱.۳ ، ۲.۳ به معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی می‌رسیم.

مثال ۳.۱.۱.

$$\begin{cases} z = ax^{۲} + by + ۳, \\ z_x = ۲ax = p \\ z_y = b = q, \end{cases}$$

لذا

$$\begin{cases} z = ax^{۲} + by + ۳, \\ a = \frac{p}{۲x} \\ b = q, \end{cases}$$

و یا

$$z = \frac{p}{2x}x^2 + qy + 3.$$

۲.۳ تمرین

معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی توابع زیر را بدست آورید.

الف) $z = (x-a)^{۲} + (y-b)^{۲}$

ب) $z = axy + b$

ج) $ax + by + cz = ۱$

د) $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} + \frac{z^{۲}}{c^{۲}} = ۱$

ه) $z = xy + y\sqrt{x^{۲} - a^{۲}} + b$

و) $z = axe^{y} + \frac{۱}{۲}a^{۲}e^{۲y} + b$

۳.۳ نحوه نوشتن معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی در حالت کلی

فرض کنید

$$u = u(x,y,z), \quad v = v(x,y,z), \quad z = z(x,y), \quad \varphi(u,v) = 0,$$

که در آن تابع φ تابعی دلخواه می‌باشد. می‌خواهیم معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی حاصل از حذف φ را بدست آوریم.

$$\begin{cases} \varphi_u u_x + \varphi_u u_z z_x + \varphi_v v_x + \varphi_v v_z z_x = ۰, \\ \varphi_u u_y + \varphi_u u_z z_y + \varphi_v v_y + \varphi_v v_z z_y = ۰, \end{cases}$$

لذا با جایگذاری

$$\begin{cases} \varphi_u(u_x + u_z p) = -\varphi_v(v_x + v_z p) \\ \varphi_u(u_y + u_z q) = -\varphi_v(v_y + v_z q), \end{cases} \tag{۳.۳}$$

حال دو رابطه را بهم تقسیم می‌کنیم

$$\frac{u_x + u_z p}{u_y + u_z q} = \frac{v_x + v_z p}{v_y + v_z q}$$

$$\underbrace{(u_z v_y - v_z u_y)}_{P} p + \underbrace{(u_x v_z - v_x u_z)}_{Q} q = \underbrace{v_x u_y - u_x v_y}_{R}$$

و یا

$$Pp + Qq = R$$

معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی مرتبه اول خواهد بود. رابطه اخیر را می توان بصورت زیر نیز بخاطر سپرد:

$$\begin{vmatrix} u_z & v_z \\ u_y & v_y \end{vmatrix} z_x + \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} z_y = \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_x & v_x \end{vmatrix}$$

مثال ۱.۳.۳. معادله دیفرانسیل با مشقات نسبی مرتبه اول حاصل از حذف φ را در روابط زیر بدست آورید.

$$u = \frac{z}{x^2}, \quad v = x - y, \quad \varphi(u,v) = 0, \quad \forall\varphi.$$

از روابط ۳.۳ داریم

$$\begin{cases} \varphi_u(-۲x^{-۳}z + x^{-۲}p) = -\varphi_v(۱ + ۰p) \\ \varphi_u(۰ + x^{-۲}q) = -\varphi_v(-۱ + ۰q), \end{cases}$$

با تقسیم بر هم داریم

$$\frac{-2x^{-3}z+x^{-2}p}{x^{-2}q}=-1,\ \Rightarrow p+q=\frac{z}{2x}.$$

که به وضوح دارای جواب عمومی $\varphi(\frac{z}{x^{۲}}, x-y)=۰$.

حل معادله دیفرانسیل با مشقات نسبی مرتبه اول

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=0.$$

۴.۳ معادله فاقد u_x یا u_y باشد.

مثلا اگر فاقد u_x باشد با فرض x ثابت معادله به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل میشود.

مثال ۱.۴.۳. $u_x+۲xu=xy.$

۵.۳ معادله بفرم $au_x+bu_y+cu=d$ باشد

که a,b,c,d توابعی دو متغیره از x,y هستند. برای حل معادله دو حالت زیر را در نظر میگیریم:

۱.۵.۳ محدودیتی برای متغیرهای x,y وجود نداشته باشد و $c,d\neq ۰$

فرض میکنیم: $r=Mx+Ny$ که $(M,N)\perp(a,b)$ [۱] و s برابر با جمله مشترک c,d است.

مثال ۱.۵.۳. $u_x-u_y+yu=xy+y^{۲},\quad u(x,x)=۲x-۱.$

[۱] نکته: $(-N,M)\perp(M,N)\quad Ma+Nb=۰\iff(M,N)\perp(a,b)$.

۲.۵.۳ اگر $x \geq ۰$ یا $y \geq ۰$

از روش لاپلاس استفاده میکنیم مثلا اگر $x \geq ۰$ نسبت به آن تبدیل لاپلاس میگیریم.

مثال ۲.۵.۳. $t > ۰$. $u_t + ۲xu_x + u = x^۲, \quad u(x,۰) = ۰, \quad u(۰,t) = ۰$

۶.۳ در معادله $au_x + bu_y = c$ فرض کنید $a, b \neq ۰$ باشد.

از روش معادله کمکی لاگرانژ استفاده میکنیم $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}$ که c می‌تواند تابعی از x, y, u باشد.
حال با حل $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$ به جواب $c_۱ = f$ و از حل $\frac{dx}{a} = \frac{du}{c}$ به جواب $c_۲ = g$ میرسیم. اکنون جواب معادله اصلی عبارت است از $\varphi(c_۱, c_۲) = ۰$ که در آن φ تابعی دلخواه است.

مثال ۱.۶.۳. $xu_x + yu_y + zu_z = xyz. \qquad u_x + ۲u_y = e^{y-۲x},$

فصل ۴

حل معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی مرتبه دوم

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

معادلات مهم:

معادله موج یک بعدی[۱] .... $u_{tt} = C^۲ u_{xx}$

معادله گرما یک بعدی[۲] .... $u_t = C^۲ u_{xx}$

معادله پتانسیل یک بعدی[۳] .... $\nabla^۲ u = u_{xx} + u_{yy} = g(x, y)$

معادله لاپلاس (پواسون) دوبعدی[۴] .... $\nabla^۲ u = u_{xx} + u_{yy} = ۰$

نشان دهید توابع زیر در معادله لاپلاس صدق می کنند

$$u = x^2 - y^2, \quad u = e^x \cos y, \quad u = a \ln(x^2 + y^2) + b, \quad u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

---

[۱] wave equation-one dimentional

[۲] heat equation- one dimentional

[۳] Potential equation - two dimentional

[۴] Laplace's equation - two dimentional

۱.۴ فاقد مشتقات نسبی نسبت به یکی از متغیرها

برای حل معادله اگر معادله فاقد مشتقات نسبی نسبت به یکی از متغیرها باشد آنگاه با فرض ثابت بودن متغیر مفقود، معادله به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل میشود.

مثال ۱.۱.۴.

$$u_{xx}=0,\quad u_{yy}+3u_y-4u=8,\quad xu_{xx}+2u_x=3(3x+2)e^{3x+2y}.$$

۲.۴ حل معادله دیفرانسیل با مشقات نسبی مرتبه دوم به روش تغییر متغیر - دالامبر

$$a(x,y)u_{xx}+b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}=d(x,y,u,u_x,u_y)$$

فرض کنید $\triangle=b^{۲}-۴ac$

اگر $\triangle>۰$ معادله هذلولی گون، (معادله موج)

اگر $\triangle=۰$ معادله سهمی گون، (معادله گرما)

اگر $\triangle<۰$ معادله بیضی گون، (معادله پتانسیل)

مثال ۱.۲.۴. بازای چه مقادیری از x و y معادله زیر هذلولی گون، سهمی گون و بیضی گون می باشد:

$$u_{xx}+e^{-x}u_{xy}+e^{-y}u_{yy}=0$$

۳.۴ حل

برای حل از معادله مشخصه زیر دو جوابش را بدست می آوریم:

$$ay'^2-by'+c=0\Rightarrow c_1=\varphi(x,y),\quad c_2=\psi(x,y).$$

الف) در هذلولی گون: $s := \psi \quad r := \varphi$ آنگاه فرم استاندارد معادله هذلولی گون :

$$u_{rs} = G(r, s, u_r, u_s)$$

مثال ۱.۳.۴. $2xu_{xx} - yu_{xy} + 2u_x = 4xy^2$.

ب) در سهمی گون: $s := \psi \quad r := x$ آنگاه فرم استاندارد معادله سهمی گون:

$$u_{rr} = G(r, s, u_r, u_s)$$

مثال ۲.۳.۴. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 4y^2$.

پ) در بیضی گون: $s := \frac{\varphi-\psi}{2i} \quad r := \frac{\varphi+\psi}{2}$ آنگاه فرم استاندارد معادله بیضی گون:

$$u_{rr} + u_{ss} = G(r, s, u_r, u_s)$$

مثال ۳.۳.۴. $e^{2x}u_{xx} + e^{2y}u_{yy} = u$.

۴.۴ حل به روش تفکیک پذیری متغیر ها(روش ضربی، جدا سازی متغیر ها)

$$u(x, y) = F(x)G(y)$$

مثال ۱.۴.۴. $x^2u_{xy} + 3y^2u = 0$.

مثال ۲.۴.۴.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, \quad y > 0 \\ u(0, y) = u_x(a, y) = 0, & \\ \begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ \lim\limits_{y \to +\infty} u = 0. \end{cases} & \end{cases}$$

مثال ۴.۴.۳.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, & \\ \begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases} & \end{cases}$$

مثال ۴.۴.۴. معادله $u_{xx} - u_y = x$ به کمک روش ضربی قابل حل نیست.

فصل ۵

توابع مختلط

۱.۵ اعداد مختلط

اگر سلسله ترتیب اعداد را از اعداد طبیعی، صحیح، گویا و حقیقی را در نظر بگیریم باید منتظر میدان وسیع تری از اعداد بنام اعداد مختلط باشیم.

تعریف ۱.۱.۵. مجموعه اعداد مختلط [۱] را با C نشان داده و به صورت زیر تعریف کنیم:

$$C = \{x + iy | x, y \in R,\ i^2 = -1\}$$

در هر عدد مختلط $z = x + iy$ و x را قسمت حقیقی [۲] وyرا قسمت موهومی [۳] میگویند بعبارتی

$$Re(z) = x,\ Im(z) = y$$

---

[۱] Complex Numbers

[۲] Real Part

[۳] Imaginary Part

۱.۱.۵ جمع وتفریق و ضرب اعداد مختلط

دو عدد مختلط $z = a + bi,\ w = c + di$ را در نظر بگیرید، جمع و تفریق و ضرب بصورت زیر تعریف میشود:

$$z \pm w = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

$$z.w = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

۲.۱.۵ مزدوج[۴] و مدول[۵]

عدد مختلط z را در نظر بگیرید مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ عبارتست از $\bar{z} = x - iy$ و مدول عدد مختلط z نیز $|z| = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ تعریف میشود.

۳.۱.۵ تقسیم اعداد مختلط

برای تقسیم عدد مختلط $z = a + bi$ بر $w = c + di$ مخرج وصورت کسر را در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می کنیم:

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \times \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

۴.۱.۵ نمایش اعداد مختلط

برای نمایش عدد مختلط $(z = x + iy)$ محور x ها را محور حقیقی و محور y ها را محور موهومی و برداری که از مبدا به نقطه (x, y) وصل میشود را بردار z در نظر بگیرید. اندازه بردار z همان مدول z خواهد بود.

۲.۵ تمرین

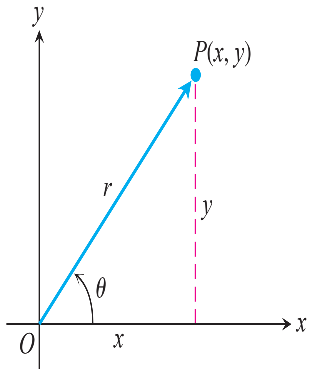
جمع، تفریق، و ضرب عدد در یک عدد مختلط را تعبیر هندسی نمائید.

[۴] Conjugate

[۵] Modulus of a Complex Number

۳.۵ فرم قطبی [۶] اعداد مختلط

نمایش هندسی عدد مختلط $z = x + iy$ را در نظر بگیرید طوری که بردار z بامحور حقیقی زاویه θ درست می کند، که آنرا را آرگومان [۷] عدد مختلط z میگویند و با $arg(z) = \theta$ نمایش میدهند، لذا مطابق شکل داریم:



$$Cos\theta = \frac{x}{|z|}, \quad Sin\theta = \frac{y}{|z|},$$

که اگر $r = |z|$ باشد داریم:

$$x = rCos\theta, \quad y = rSin\theta$$

$$z = x + iy = r(Cos\theta + iSin\theta) \quad (*)$$

رابطه $(*)$ را نمایش قطبی عدد مختلط z گویند.

قرارداد) رابطه $Cos\theta + iSin\theta = e^{i\theta}$ را رابطه اویلر [۸] میگویند، لذا:

$$z = re^{i\theta},$$

مثال) برای عدد مختلط $z = ۱ + i$ داریم:

$$arg(z) = \frac{\pi}{4}, \quad r = |z| = \sqrt{2},$$

$$z = 1 + i = \sqrt{2}(Cos\frac{\pi}{4} + iSin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

---

[۶] Polar

[۷] Argument

[۸] Euler's Formula

تمرین) نشان دهید:

$$\theta = arctan\frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

۴.۵ توان n–ام یک عدد مختلط

برای محاسبه توان یک عدد مختلط ابتدا آنرا به فرم قطبی تبدیل میکنیم:

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(Cosn\theta + iSinn\theta).$$

مثال) برای $z = ۱ + i = \sqrt{۲}e^{i\frac{\pi}{۴}}$ داریم:

$$z^{100} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{100} = 2^{50}e^{25\pi i} = 2^{50}(Cos25\pi + iSin25\pi) = -2^{50}.$$

۵.۵ تمرین

اگر $z_۱ = r_۱e^{i\theta_۱},\ z_۲ = r_۲e^{i\theta_۲}$ باشد نشان دهید:

$$\begin{aligned} arg(z_۱z_۲) &= arg(z_۱) + arg(z_۲) \\ arg\left(\frac{z_۱}{z_۲}\right) &= arg(z_۱) - arg(z_۲) \\ arg(z_۱)^n &= narg(z_۱) \end{aligned}$$

۶.۵ ریشه n–ام یک عدد مختلط

فرض کنید $z = re^{i\theta},\ w = Re^{i\alpha}$ میخواهیم $w = \sqrt[n]{z}$ را محاسبه کنیم:

$$w^n = z \Rightarrow R^n e^{in\alpha} = re^{i\theta} \Rightarrow$$

$$R^n(Cosn\alpha + iSinn\alpha) = r(Cos\theta + iSin\theta),$$

با توجه به مدول داریم:

$$Sinn\alpha = Sin\theta,\ Cosn\alpha = Cos\theta,\ R = \sqrt[n]{r},$$

لذا باید داشته باشیم:

$$n\alpha = 2k\pi + \theta,\ n\alpha = 2k\pi + \pi - \theta,$$

$$n\alpha = 2k\pi \pm \theta,$$

اما تنها جواب قابل قبول عبارتست از (چرا؟)

$$n\alpha = 2k\pi + \theta \to \alpha = \frac{2k\pi + \theta}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

در نتیجه

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(Cos\theta + iSin\theta)} = \sqrt[n]{r}\left(Cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + iSin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right),$$

که $k = ۰, ۱, ۲, \cdots, n - ۱$.

مثال) فرض کنید $z = i$ میخواهیم $\sqrt[۳]{z}$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}
z &= i = (Cos\frac{\pi}{۲} + iSin\frac{\pi}{۲}),\\
k = ۰ \to w_۰ &= \sqrt[۳]{z} = \left(cos\frac{\frac{\pi}{۲}}{۳} + iSin\frac{\frac{\pi}{۲}}{۳}\right) = Cos\frac{\pi}{۶} + iSin\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + i\frac{۱}{۲},\\
k = ۱ \to w_۱ &= \sqrt[۳]{z} = \left(cos\frac{۲\pi + \frac{\pi}{۲}}{۳} + iSin\frac{۲\pi + \frac{\pi}{۲}}{۳}\right) = Cos\frac{۵\pi}{۶} + iSin\frac{۵\pi}{۶} = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} + i\frac{۱}{۲},\\
k = ۲ \to w_۲ &= \sqrt[۳]{z} = \left(cos\frac{۴\pi + \frac{\pi}{۲}}{۳} + iSin\frac{۴\pi + \frac{\pi}{۲}}{۳}\right) = Cos\frac{۳\pi}{۲} + iSin\frac{۳\pi}{۲} = -i,
\end{aligned}$$

۷.۵ تمرین

ابتدا نشان دهید: $w_۰ + w_۱ + w_۲ = ۰$ و سپس نمایش سه بردار $w_۰,\ w_۱,\ w_۲$ را رسم کنید،و نهایتا نتیجه بدست آمده را توضیح دهید.

۸.۵ تمرینات اعداد مختلط

(الف) مطلوب است محاسبه :

$$Im\frac{2-i}{4-3i} \qquad Re\frac{(1+i)^2}{3+2i} \qquad Imz^4,$$

$$Re\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 \qquad \left|\frac{(3+4i)^4}{(3-4i)^3}\right| \qquad Im[(1+i)^n + (1-i)^n]$$

(ب) قسمت حقیقی و موهومی اعداد زیر را بیابید:

$$\frac{3-5i}{7i+1} \qquad \frac{1}{3z+2} \qquad \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$$

(ج) قدر مطلق و مزدوج اعداد زیر را بیابید:

$$(1+i)^6 \qquad \frac{3-i}{\sqrt{2}+3i} \qquad (2+i)(4+3i)$$

(د) ثابت کنید:

$$\left|\frac{z_1}{z_2z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2||z_3|}, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2z_3}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}.\overline{z_3}}, \qquad |z|^2 = z\overline{z}$$

$$|z| = |\overline{z}|, \qquad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}, \qquad |z^n| = |z|^n.$$

(ه) آیا تساوی $Re(zw) = RezRew$ درست است. همین طور برای قسمت موهومی بررسی کنید.

(و) مجموعه نقاطی که در معادله $|z-۴i| + |z+۴i| = ۱۰$ صدق میکنند را بیابید. این مسئله رو بدون حل تعبیر هندسی نمائید.

(ز) مجموعه نقاطی که در معادله $|z-۲i| = ۴$ صدق میکنند را بیابید. این مسئله رو بدون حل تعبیر هندسی نمائید.

(ح) حاصل عبارات زیر را تعیین کنید:

$$(1+i)^{1/3} \qquad (2\sqrt{3}+2i)^{1/4} \qquad \sqrt[۶]{i}$$

$$\sqrt[۳]{۱-i} \qquad \sqrt[۳]{۱-i}\,\sqrt[۵]{۱+i} \qquad \sqrt[۵]{i-\sqrt{۳}}$$

(ط) در معادله $f(x) = ۰$ که در آن $f(x)$ یک چند جمله ای از درجه n با ضرائب حقیقی میباشد فرض کنید $z = a+ib$ یک ریشه آن میباشد نشان دهید که $\bar{z}$ نیز یک ریشه آن خواهد بود.

(ی) مکان هندسی نقاط زیر را بیابید :

$$|z-1| = |z+1| \qquad |z-1| = 1 \qquad |z|^2 = z + \bar{z}$$

(یالف) حاصل های زیر را بدست آورید:

$$1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$$

$$1 + i^2\binom{n}{1} + i^6\binom{n}{3} + \cdots$$

$$1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \binom{n}{16} + \cdots$$

(یب) ثابت کنید: $\sqrt{۱ + i\sqrt{۳}} + \sqrt{۱ - i\sqrt{۳}} = \sqrt{۶}$

(یج) اگر $x + \frac{۱}{x} = ۲cos\alpha$ باشد ثابت کنید:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2cos(n\alpha)$$

(ید) ثابت کنید:

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots = 2^{n/2} sin\frac{n\pi}{4}$$

۹.۵ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۹.۵. همسایگی نقطه $z_۰$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

تعریف ۲.۹.۵. تابع تحلیلی، تابعی است که به طور محلی به وسیله یک سری توانی همگرا مشخص می‌شود.

یک تابع تحلیلی [۹] است اگر برابر با سری تیلورش در یک همسایگی باشد.

تعریف ۳.۹.۵. مجموعه U را در $\mathbb{C}$ باز گوئیم هرگاه

$$\forall z \in U \quad \exists r > 0 \quad N_r(z) \subseteq U.$$

تعریف ۴.۹.۵. تابع f مختلط گوئیم هرگاه $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ که هر $z \in \mathbb{C}$ را به $w = f(z) \in \mathbb{C}$ می‌برد.

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

مثال ۵.۹.۵.

$$f(z) = z^2 \Rightarrow f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy.$$

[۹] می‌توان به توابع تحلیلی مانند یک پل بین چند جمله ایها و توابع در حالت کلی فکر کرد. اینجا توابع تحلیلی حقیقی و توابع تحلیلی مختلط وجود دارند، که شباهتها و تفاوتهایی دارند.

مثال ۶.۹.۵.

$$f(z)=\frac{1}{z}\Rightarrow f(x+iy)=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

مثال ۷.۹.۵.

$$f(z)=e^z\Rightarrow f(x+iy)=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$u(x,y)=e^x\cos y,\quad v(x,y)=e^x\sin y,\quad |e^z|=e^x.$$

۱۰.۵ تمرین

ثابت کنید:

(الف) $f(z)=\sin z\Rightarrow u=\sin x\cosh y,\quad v=\cos x\sinh y$

(ب) $f(z)=\cos z\Rightarrow u=\cos x\cosh y,\quad v=-\sin x\sinh y$

(ج) $f(z)=\cosh z\Rightarrow u=\cosh x\cos y,\quad v=\sinh x\sin y$

(د) $f(z)=\ln z=\ln(re^{i\theta})\Rightarrow u=\ln r,\quad v=\theta$

البته با توجه به اینکه

$$\ln(re^{i\theta})=\ln(re^{i(\theta+2k\pi)})$$

نگاشت $\ln z$ تابع نیست مگر $-\pi<\theta\leq\pi$.

تعریف ۱.۱۰.۵. توابع مثلثاتی و هیپربولیک سینوس و کسینوس بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$
$$\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

روابط زیر براحتی قابل اثبات هستند:

$$\sin(iz)=i\sinh z,\quad \cos(iz)=\cosh z,$$

$$\sinh(iz)=i\sin z,\quad \cosh(iz)=\cos z.$$

۱۱.۵ حد

تعریف ۱.۱۱.۵. گوئیم f در $z_{\circ}$ داری حد $w_{\circ}$ است هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon.$$

مثال ۲.۱۱.۵. نشان حد $\lim_{z\to\circ} \frac{\bar{z}}{z}$ موجود نیست.

۱۲.۵ پیوستگی

تعریف ۱.۱۲.۵. گوئیم f در $z_{\circ}$ پیوسته است هرگاه

f در $z_{\circ}$ تعریف شده باشد

$\lim_{z\to z_{\circ}} f(z)$ موجود باشد

و $\lim_{z\to z_{\circ}} f(z) = f(z_{\circ})$.

مثال ۲.۱۲.۵. آیا تابع $f(z) = \frac{Im(z^{۲})}{|z|^{۲}}$ برای $z \neq \circ$ و برای $z = \circ$ داشته باشیم $f(z) = \circ$ پیوسته هست؟

۱۳.۵ مشتق

تعریف ۱.۱۳.۵. اگر U یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{C}$ و $f : \mathbb{C} \to U$ یک تابع باشد، می گوییم f در نقطه $z_{\circ} \in U$ مشتق مختلط دارد اگر حد

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

وجود داشته باشد.

مفهوم مشتقپذیری جند خصوصیت مشترک با مشتقپذیری حقیقی دارد: خطی است و از قوانین ضرب، تقسیم و قاعده زنجیری تبعیت می‌کند.

تعریف ۲.۱۳.۵. تابع fرو مجموعه باز D در خط مختلط، تحلیلی است اگر برای هر z_0 در D بتوان نوشت:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-xz_0)^2 + \cdots$$

در این فرمول ضرایب $a_0, a_1, \cdots$ اعداد مختلط هستند. و سری برای z در یک همسایگی از z_0 همگرا است. به صورت دیگر، یک تابع تحلیلی یک تابع بینهایت بار مشتق پذیراست به این صورت که سری تیلور در هر نقطه x_0 در دامنه اش

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

برای z به اندازه کافی نزدیک به z_0 همگراست و مقدارش برابر با $f(z)$ است.

تعریف ۳.۱۳.۵. تابعی که بر کل صفحه مختلط تحلیلی باشد را تابع تام می نامند.

مثال ۴.۱۳.۵.(الف) هر چند جمله‌ای (حقیقی یا مختلط) یک تایع تحلیلی است. به این دلیل که اگر یک چند جمله‌ای از درجه n باشد، هر جمله ازدرجه بزرگ‌تر از n در بسط سری تیلورش صفر است،

(ب) تابع نمایی تحلیلی است. هر سری تیلور این تابع برای همه مقدار z (حقیقی یا مختلط) همگرا می‌شود.

(ج) توابع مثلثاتی، لگاریتم و توابع توانی روی هر بازه باز در دامنه شان تحلیلی اند.

(د) تابع قدر مطلق تحلیلی نیست زیرا مشتق پذیر نیست. مثل

$$f(z) = Re(z^2) + i|z|^2, \quad f(z) = Im(z) - i|Re(z)|.$$

(ه) توابع تعریف شده تکه ای تحلیلی نیستند.

۱۴.۵ خصوصیات توابع تحلیلی

(الف) مجموع ها، ضرب‌ها و ترکیبات توابع تحلیلی، تحلیلی اند.

(ب) معکوس یک تابع تحلیلی که هیچ کجا صفر نیست، تحلیلی است.

(ج) هر تابع تحلیلی هموار است.

۱۵.۵ معادلات کوشی-ریمان

معادلات کوشی-ریمان در آنالیز مختلط که به احترام آگوستین لوییز کوشی و برنارد ریمان نام گذاری شده‌اند، دو معادله مشتق جزئی هستند که شرط لازم ولی نه کافی را برای هلومورفیک بودن یک تابع فراهم می‌کنند. با شرایط اضافی مانند اینکه بخش‌های حقیقی و موهومی تابع، توابع حقیقی و مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند، برقراری معادلات، معادل می‌شود با تحلیلی بودن تابع مختلط. این مجموعه از معادلات اولین بار در کارهای دالامبر در ۱۷۵۲ ظاهر شد. بعداً در ۱۷۷۷، اویلر این مجموعه را به توابع تحلیلی متصل کرد. کوشی این معادلات را برای ساخت تئوری توابع خود در ۱۸۱۴ به کار برد. رساله کوشی در مورد تئوری توابع در ۱۸۵۱ منتشر شد.

تابع مختلط $f(x+iy)=u+iv$ مشتق پذیر است اگر و تنها اگر در معادلات کوشی-ریمان صدق کرده و u و v مشتقات جزئی اول پیوسته بر حسب x و y داشته باشند.

قضیه ۱.۱۵.۵. ([۱]) فرض کنید $f(z)=u+iv$ که $z=x+iy$ یک تابع از یک مجموعه باز از اعداد مختلط $\mathbb{C}$ به $\mathbb{C}$ باشد که در آن $x,y\in R$ و u,v توابع حقیقی اند، آنگاه f مشتق پذیر است اگر و تنها اگر u و v دارای مشتقات جزئی اول پیوسته بوده و مشتقات جزئی آنها در معادلات کوشی ریمان یعنی

$$u_x=v_y,\quad y_y=-v_x,$$

صدق کنند.

مثال ۲.۱۵.۵. مشتق پذیری توابع زیر را بررسی نمائید:

(الف) $f(z)=e^z$

(ب) $f(z)=zIm(z)$

(ج) $f(z)=\sinh\bar{z}$

تعریف ۳.۱۵.۵. تابع $u(x,y)$ همساز گوئیم هرگاه خود تابع و مشتقات مرتبه اول و دوم آن پیوسته و در معادله لاپلاس صدق کند.

مثال ۴.۱۵.۵. تابع $u=e^x\cos y$ همساز است.

تعریف ۵.۱۵.۵. هرگاه تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه توابع u و v همساز هستند، در این حالت تابع u را مزدوج همساز v میگویند و بالعکس.

مثال ۶.۱۵.۵. $f(z)=u+iv$ تحلیلی و $u=e^x\cos y$ باشد مزدوج همساز u را بیابید.

تمرین

نشان دهید تابع $u(x,y)=e^x\sin y$ همساز می‌باشد، نشان دهید تابع $u(x,y)=x^۳-۳xy^۲$ همساز می‌باشد، سپس مزدوج همساز آنرا بیابید. نشان دهید تابع $u(x,y)=x+e^x\cos y$ همساز می‌باشد، سپس مزدوج همساز آنرا بیابید. نشان دهید تابع $u(x,y)=e^{-۲xy}\sin(x^۲-y^۲)$ همساز می‌باشد، سپس مزدوج همساز آنرا بیابید. نشان دهید تابع $u(x,y)=xe^x\cos y-ye^x\sin y$ همساز می‌باشد، سپس مزدوج همساز آنرا بیابید. نشان دهید تابع $u(x,y)=e^x(x\sin y-y\cos y)$ همساز می‌باشد، سپس مزدوج همساز آنرا بیابید. نشان دهید تابع $u(x,y)=a\ln\sqrt{x^۲+y^۲}$ همساز می‌باشد، سپس مزدوج همساز آنرا بیابید. آیا تابع $f(z)=zIm(z)$ در معادلات کشی ریمان صدق می‌کند.

۱۶.۵ مشتق گیری

تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ بر روی $\mathbb{C}$ را در نظر بگیرید. می خواهیم مشتق آن را در نقطه z محاسبه کنیم

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)+iv(x+h,y)-(u(x,y)+iv(x,y))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)+u(x,y)+i(v(x,y)+v(x+h,y))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}+i\frac{(v(x+h,y)-v(x,y))}{h}\right)\\
&= u_x+iv_x
\end{aligned}$$

و یا

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z+ih)-f(z)}{ih}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x,y+h)+iv(x,y+h)-(u(x,y)+iv(x,y))}{ih}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{ih}+i\frac{(v(x,y+h)-v(x,y))}{ih}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(-i\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h}+\frac{(v(x,y+h)-v(x,y))}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(-i\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h}+\frac{(v(x,y+h)-v(x,y))}{h}\right)\\
&= v_y-iu_y
\end{aligned}$$

اکنون با برابر گرفتن این دو داریم

$$u_x+iv_x=v_y-iu_y\Rightarrow u_x=v_y,\quad u_y=-v_x.$$

۱۷.۵ توضیح تکمیلی برای مطالعه بیشتر

تابع هولومورفیک، امروزه، اکثر ریاضی دانان عبارت «تابع هولومورفیک» را به «تابع تحلیلی» ترجیح می‌دهند، نظر به اینکه عبارت دوم مفهوم کلی تری است. این همچنینی به این دلیل است که یک نتیجه مهم در آنالیز

مختلط این است که هر تابع هولومورفیک به طور مختلط تحلیلی است، حقیقتی که مستقیما تعاریف را دنبال نمی‌کند. با این وجود عبارت «تحلیلی» همچنان پرکاربرد است. کلمه «هولومورفیک» از کلمه یونانی holos به معنی «همه» و morphe به معنی «شکل» یا «ظاهر» مشتق شده است. توابع هولومورفیک موضوع اصلی در مطالعه آنالیز مختلط هستند. آنها توابعی هستند که بر روی یک زیر مجموعه باز از صفحه مختلط $\mathbb{C}$ تعریف شده اند با مقادیری در $\mathbb{C}$ که در هر نقطه مشتق مختلط دارند. هولومورفیک بودن یک شرط قویتر از مشتقپذیری مختلط است و دلالت بر این دارد که تابع بینهایت بار مشتقپذیر است و می‌تواند با سری تیلوراش نشان داده شود. واژه‌ی تابع تحلیلی اغلب بطور قابل معاوضه به جای «تابع هولومورفیک» استفاده می‌شود. اگرچه دقت شود که عبارت اول معانی دیگری نیز دارد. تابعی که بر کل صفحه مختلط هولومورفیک باشد تابع تام نامیده می‌شود. عبارت «هولومورفیک در نقطه a» به معنی نه تنها مشتقپذیر در a، بلکه مشتقپذیر در هر جا درون یک دیسک باز به مرکز a (یک همسایگی a) در صفحه مختلط است.

تابع هولومورفیک

اگر f در هر نقطه $z_0 \in U$ مشتق‌پذیر مختلط باشد، می گوییم f بر U هولومورفیک است. می گوییم f در نقطه z_0 هولومورفیک است اگر که در یک همسایگی از z_0 هولومورفیک باشد.

مثال ۱.۱۷.۵. تمام توابع چندجمله‌ای در z با ضرایب مختلط بر $\mathbb{C}$ هولومورفیک اند، و بنابراین سینوس، کسینوس، و تابع نمایی چنین اند. (توابع مثلثاتی در حقیقت به طور نزدیک وابسته به تابع نمایی اند و به وسیلهٔ فرمول اویلر می‌توانند توسط تابع نمایی تعریف شوند). شاخه اصلی تابع لگاریتم در مجموعه $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ هولومورفیک است. تابع ریشه می‌تواند به صورت $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\ln z}$ تعریف شود و بنابراین هولومورفیک است هر کجا که لگاریتم $\ln z$ هولومورفیک باشد. تابع $\frac{1}{z}$ بر $\{z : z \neq 0\}$ هولومورفیک است.

۱.۱۷.۵ خواص توابع هولومورفیک

از آنجا که مشتق گیری مختلط خطی است و از قوانین ضرب، تقسیم، و قاعده زنجیری تبعیت می‌کند، مجموع ها، ضرب‌ها و ترکیب توبع هولومورفیک، هولومورفیک اند و خاج قسمت دو تابع هولومورفیک، هولومورفیک

است هرجا که مخرج مخالف صفر باشد. هر تابع هولومورفیک بینهایت با مشتق‌پذیر در هر نقطه است. تابع هولومورفیک منطبق بر سری تیلوراش است و سری تیلور آن در هر دیسک باز که کاملاً درون دامنه U قرار دارد همگراست. سر تیلور ممکن است در یک دیسک بزرگ همگرا باشد؛ برای نمونه سری تیلور تابع لگاریتم در هر دیسک که شامل ۰) نباشد همگراست، در مجاورت خط حقیقی منفی. برای اثبات به توابع هولومورفیک تحلیلی اند مراجعه کنید. اگر $\mathbb{C}$ را با $\mathbb{R}^۲$ نشان دهیم، آنگاه توابع هولومورفیک منطبق بر آن دسته از توابع از دو متغیر حقیقی اند که در معادلات کوشی–ریمان صدق می‌کنند. نزدیک نقاط با مشتقاط غیر صفر، توابع هولومورفیک همنوایند به این معنی که آنها زاویه و شکل (ولی نه اندازه) اشکال کوچک را حفظ می‌کنند. فرمول انتگرال کوشی می‌گوید که هر تابع هولومورفیک درون یک دیسک تماما با مقادیرش روی حاشیه دیسک مشخص می‌شود. از دید جبری مجموعه توابع هولومورفیک بر یک مجموعه باز یک حلقه جابجایی و یک فضای برداری مختلط اند.

فصل ۶

انتگرال توابع مختلط

۱.۶ معادلات پارامتری برخی از منحنی ها در $\mathbb{C}$

مقدمه

معادله دایره به شعاع r و مرکز z_0 عبارت است از $|z - z_0| = r$ که پارامتری سازی آن عبارت است از $z = z_0 + re^{it}$ که $0 \leq t \leq 2\pi$.

معادله خطی که از دو نقطه z_1 و z_2 می گذرد عبارت است از $z - z_1 = (z_2 - z_1)t$ که $0 \leq t \leq 1$.

تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۶. منحنی C تابعی است از بازه $[a,b]$ به $\mathbb{C}$ که هر $t \in [a,b]$ را به نقطه $z(t)$ می برد. به عبارتی منحنی c نقاط انتهایی بردار $z \in \mathbb{C}$ است.

تعریف ۲.۱.۶. منحنی c را بسته گوئیم هرگاه $c(a) = c(b)$ باشد.

تعریف ۳.۱.۶. منحنی c را ساده گوئیم هرگاه $c(t_1) = c(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$. بعبارتی منحنی خودش رو قطع نکند [1].

تعریف ۴.۱.۶. مجموعه $A \subseteq \mathbb{C}$ را همبند گوئیم هرگاه هر دو نقطه در آن را به کمک چند پاره خط که کلا در داخل A قرار گیرد بتوان بهم وصل کرد.

تعریف ۵.۱.۶. مجموعه U را در $\mathbb{C}$ باز گوئیم هرگاه

$$\forall z \in U \quad \exists r > 0 \quad N_r(z) \subseteq U \quad N_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

تعریف ۶.۱.۶. مجموعه A را ناحیه گوئیم هرگاه همبند و باز باشد.

۲.۶ انتگرال توابع مختلط روی منحنی

۱.۲.۶ روش اول - پارامتری سازی

این روش معمولا زمانی بکار می رود که تابع f در حوزه D تحلیلی نباشد.

مثال ۱.۲.۶. اگر c پاره خط واصل بین دو نقطه $z_1 = 4i$ تا $z_2 = 2 + 3i$ باشد. مطلوبست

$$\oint_c (Rez^2 + iImz)dz$$

مثال ۲.۲.۶. اگر c معادله دایره $|z| = 2$ باشد. مطلوبست

$$\int_c \bar{z}dz$$

مثال ۳.۲.۶. اگر c متشکل از دو منحنی $c_1 : z = 2e^{it}$ و $c_2 : z = t^2 + 2(1+t)i$ که $0 \leq t \leq 1$ باشد. مطلوبست

$$\int_c izdz$$

توجه داریم که تابع $f(z) = iz$ در ناحیه مذکور تحلیلی است.

---

[1] یک به یک باشد

مثال ۴.۲.۶. اگر c متشکل از چهار منحنی

$$c_1 : z = 2e^{it} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$c_2 : z_1 = 2 - 2i, z_2 = 2$$

$$c_3 : z_1 = -2 - 2i, z_2 = 2 - 2i$$

$$c_4 : z_1 = -2, z_2 = -2 - 2i$$

باشد. مطلوبست

$$\int_c \frac{dz}{|z|^2 + 3(Rez)^2} dz$$

توجه داریم

$$\int_c f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz + \int_{c_3} f(z)dz + \int_{c_4} f(z)dz$$

۲.۲.۶ روش دوم - قضیه کوشی گورسا

قضیه ۵.۲.۶. اگر f تابعی تحلیلی در ناحیه D شامل منحنی بسته c باشد آنگاه

$$\oint f(z)dz = 0.$$

مثال ۶.۲.۶.

$$\oint_{|z|=1} z^5 e^z dz = 0.$$

۳.۲.۶ روش سوم - مستقل از مسیر

اگر منحنی c بسته نباشد و تابع f تحلیلی در حوزه D و دارای تابع اولیه F باشد که منحنی c نقطه $z_۱$ را به $z_۲$ وصل می کند آنگاه

$$\int_c f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$

مثال ۷.۲.۶. اگر c منحنی باز $z = \pi x^۳ + ix$ که $۰ < x < ۱$ باشد مطلوبست

$$\int_c \sin^3 z dz$$

۳.۶ روش چهارم - قضیه انتگرال کوشی

قضیه ۱.۳.۶. اگر f تابعی تحلیلی در ناحیه D شامل منحنی بسته c باشد آنگاه

$$\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z_0).$$

و اگر $n =$ ۱ باشد خواهیم داشت

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0).$$

توجه داریم که f در z_0 که در z_0 درون c است تحلیلی نیست.

مثال ۲.۳.۶.

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{(z+4)(z-i)}dz = \oint_{|z|=3} \frac{\frac{e^z}{z+4}}{z-i}dz = 2\pi i \frac{e^i}{i+4}.$$

تمرین

(الف) مطلوب است محاسبه :

$$\int_{c_i} \frac{dz}{z^2+1} \quad i = 1, 2, 3$$

روی منحنی های زیر:

$$c_1 : |z-i| = 1 \quad c_2 : |z+i| = 1 \quad c_3 : |z| = 2.$$

۲ مطلوب است محاسبه :

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}.$$

۳ نشان دهید اگر f تابعی تحلیلی در حوزه D و $|f(z)|$ در D ثابت باشد آنگاه خود f در D ثابت است.

۴ مطلوب است محاسبه :

$$\oint_{|z-3i|=\frac{1}{2}} \frac{(2z+1)dz}{z^3 - iz^2 + 6z}.$$

۵ مطلوب است محاسبه :

$$\oint_{|z|=2}(z - Rez)dz.$$

۶ مطلوب است محاسبه :

$$\oint_{i\in c}\frac{(4e^{z^2}dz}{(z-i)^3}.$$

۷ مطلوب است محاسبه :

$$\oint_{|z-1-2i|=2}\frac{(z+1)dz}{z^3-2z^2}.$$

۸ مطلوب است محاسبه :

$$\oint_{|z|=2}\frac{e^z dz}{z}.$$

۹ مطلوب است محاسبه :

$$\oint_{|z|=1/2}\frac{(3z+1)dz}{z^3-z^2}.$$

۱۰ مطلوب است محاسبه :

$$\oint_{|z|=2}\frac{(3z+1)dz}{z^3-z^2}.$$

۱۱ مطلوب است محاسبه :

$$\oint_{|z-i/2|=1/3}\frac{\ln(z^2+1)dz}{(2z-i)^2}.$$

۱۲ مطلوب است محاسبه :

$$\oint_{|z|=3}\frac{\sin^2+\cos\pi z^2}{z-2}dz.$$

فصل ۷

تمرینات ریاضی مهندسی

۱ سری فوریه تابع $f(x) = x - x^{۲}, \quad -\pi < x < \pi$ با دوره تناوب $T = ۲\pi$ رابیابید.

۲ سری فوریه تابع $f(x) = x + \sin x, \quad -\pi < x < \pi$ با دوره تناوب $T = ۲\pi$ رابیابید.

۳ سری فوریه تابع $f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$ با دوره تناوب $T = ۲\pi$ رابیابید.

۴ برای تابع $f(x) = e^{۲x}, \ ۰ \leq x \leq ۱$ سری فوریه کسینوسی را بدست آورید.

۵ برای تابع $f(x) = e^{۲x}, \ ۰ \leq x \leq ۱$ سری فوریه سینوسی را بدست آورید.

۶ برای تابع $f(x) = \sin x, \ ۰ \leq x \leq \pi$ سری فوریه کسینوسی را بدست آورید.

۷ سری فوریه تابع $f(x) = x^{۲}, \quad -\pi < x < \pi$ رابیابید. سپس مقادیر هر یک از سریهای عددی زیر را بدست آورید:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots, \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots.$$

۸ سری فوریه تابع زیر را بیابید:

$$f(x) = \begin{cases} ۱ + \frac{۲}{\pi}x, & -\pi \leq x < ۰ \\ ۱ - \frac{۲}{\pi}x, & ۰ \leq x \leq \pi \end{cases}$$

۹ سری فوریه تابع زیر را بیابید:

$$f(x)=\begin{cases}-۱, & -۱\le x<۰\\ ۱, & ۰<x\le ۱\end{cases}$$

۱۰ اگر $f(x)$ متناوب با دوره تناوب T باشد نشان دهید برای هر $۰<a<T$ داریم:

$$\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx.$$

۱۱ ثابت کنید برای هر $a,b\in\mathbb{R}$ و غیر صفر داریم:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_b^{b+T} f(x)dx.$$

۱۲ اگر $f(x)$ متناوب با دوره تناوب T و f در فاصله $[۰,T]$ مشتق پذیر باشد نشان دهید f' نیز متناوب است.

۱۳ نشان دهید برای هر $m\neq n$ داریم:

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx dx=0.$$

۱۴ نشان دهید برای هر $m\neq n$ داریم:

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx dx=0.$$

۱۵ نشان دهید در معادله دیفرانسیل لژاندر $(۱-x^۲)y''-۲xy'+n(n+۱)y=۰$ چند جمله‌ایهای لژاندر برهم عمودند[۱] یعنی:

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}۰, & m\neq n\\ \frac{۲}{۲n+۱}, & m=n\end{cases}$$

۱۶ نشان دهید:

$$\int_۰^{۲\ell}\cos\frac{m\pi}{\ell}x\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx=\begin{cases}۰, & m\neq n\\ \ell, & m=n\end{cases}\qquad ۱۶-۱$$

$$\int_۰^{۲\ell}\sin\frac{m\pi}{\ell}x\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=\begin{cases}۰, & m\neq n\\ \ell, & m=n\end{cases}\qquad ۱۶-۲$$

[۱] Orthogonal

$$\int_{۰}^{۲\ell} \cos\frac{m\pi}{\ell}x\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx = ۰.$$ ۱۶-۳

۱۷ بسط نیم دامنه‌ای کسینوسی هر یک از توابع زیر را بدست آورید و توسیع و نمودار آنرا رسم کنید:

۱۷-۱ $f(x) = ۱, \quad ۰ < x < \ell$

۱۷-۲ $f(x) = ۱ - \frac{x}{\ell}, \quad ۰ < x < \ell$

۱۷-۳ $f(x) = x, \quad ۰ < x < \ell$

۱۷-۴ $f(x) = e^x, \quad ۰ < x < \ell$

۱۷-۵ $f(x) = \sin\frac{\pi x}{\ell}, \quad ۰ < x < \ell$

۱۷-۶ $f(x) = \sin\frac{\pi x}{۲\ell}, \quad ۰ < x < \ell$

۱۷-۷
$$f(x) = \begin{cases} ۱, & ۰ < x < \frac{\ell}{۲} \\ ۰, & \frac{\ell}{۲} < x < \ell \end{cases}$$

۱۸ بسط نیم دامنه‌ای سینوسی هر یک از توابع زیر را بدست آورید و توسیع و نمودار آنرا رسم کنید:

۱۸-۱ $f(x) = ۱, \quad ۰ < x < \ell$

۱۸-۲ $f(x) = x, \quad ۰ < x < \ell$

۱۸-۳ $f(x) = x^۲, \quad ۰ < x < \ell$

۱۸-۴ $f(x) = x^۳, \quad ۰ < x < \ell$

۱۸-۵
$$f(x) = \begin{cases} ۱, & ۰ < x < \frac{\ell}{۲} \\ ۰, & \frac{\ell}{۲} < x < \ell \end{cases}$$

۱۸-۶
$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}, & ۰ < x < \frac{\ell}{۲} \\ \frac{۳}{۲}, & \frac{\ell}{۲} < x < \ell \end{cases}$$

۱۹ با استفاده از انتگرال فوریه روابط زیر را ثابت کنید:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos wx + w\sin wx}{1+w^{2}}dw = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{\pi}{2} & x=0 \\ \pi e^{-x}, & 0<x \end{cases}$$ ۱۹-۱

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos \pi w}{w}\sin wx dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0<x<\pi \\ 0, & \pi<x \end{cases}$$ ۱۹-۲

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w}dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0\leq x<1 \\ \frac{\pi}{4} & x=1 \\ 0, & 1<x \end{cases}$$ ۱۹-۳

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi w}{2} \cos wx}{1-w^{2}}dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x, & |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}<|x| \end{cases}$$ ۱۹-۴

۲۰ توابع زیر را بصورت زوج توسیع داده و انتگرال فوریه آنها را بدست آورید:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<a \\ 0, & a<x \end{cases}$$ ۲۰-۱

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0<x<a \\ 0, & a<x \end{cases}$$ ۲۰-۲

$$f(x) = e^{-x} + e^{-2x}, \quad x>0.$$ ۲۰-۳

۲۱ توابع زیر را بصورت فرد توسیع داده و انتگرال فوریه آنها را بدست آورید:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 2-x & 1<x<2 \\ 0, & 2<x \end{cases}$$ ۲۱-۱

$$f(x) = \begin{cases} x^{2}, & 0<x<a \\ 0, & a<x \end{cases}$$ ۲۱-۲

۲۲ نشان دهید در رابطه $\frac{du}{c} = \frac{dy}{b} = \frac{dx}{a}$ اگر $a + b + c = 0$ باشد آنگاه $dx + dy + du = 0$.

۲۳ معادلات زیر را حل نمائید:

۲۳-۱ $u_x + u_y = u$

۲۳-۲ $-xu_x + yu_y = u$

۲۳-۳ $x(y - u)u_x + y(u - x)u_y = u(x - y)$

۲۳-۴ $3u_x + 4u_y = 2$

۲۳-۵ $xuu_x + yuu_y = xy$

۲۳-۶ $x^2 u_x + y^2 u_y = u^2$

۲۳-۷ $yu_x - xu_y = y^2 - x^2$

۲۳-۸ $yuu_x - xuu_y = yu$

۲۳-۹ $xu_x + yu_y = x$

۲۳-۱۰ $x(y^2 - u^2)u_x + y(u^2 - x^2)u_y = u(x^2 - y^2)$

۲۴ معادلات زیر را با تبدیل به معادله دیفرانسیل معمولی[۲] حل نمائید:

۲۴-۱ $u_x + xu = x^2$

۲۴-۲ $u_x + 2 = y^2$

۲۴-۳ $u_{xx} - 4u = 0$

۲۴-۴ $u_{xx} + 2u_x = 3(3x + 2)e^{3x+2y}$

۲۵ معادلات زیر را با جداسازی متغیرها[۳] حل نمائید:

۲۵-۱ $xu_x - yu_y = 0$

[۲] ODE

[۳] Separation of variables

۲۵-۲ $u_x + u_y = 0$

۲۵-۳ $au_{xy} + bu = 0$

۲۵-۴ $x^2 u_{xx} + yu_{yy} = 0$

۲۵-۵ $u_t = u_{xx}$

۲۵-۶ $u_t = 9u_{xxx}$

۲۵-۷ $yu_x = xu_y$

۲۵-۸ $u_{xx} = u_{yy}$

۲۵-۹ $xu_{xy} - u_y = 3y^2$

۲۵-۱۰ $u_{xy} = 1, \quad u_x(x,0) = p, \quad u_y(0,y) = q, \quad u(0,0) = p + q.$

۲۶ معادلات زیر را به کمک معادلات لاگرانژ[۴] و هم به کمک جداسازی متغیر حل نموده و جوابها را با هم مقایسه نمائید:

۲۶-۱ $x^2 u_x + y^2 u_y = (x+y)u$

۲۶-۲ $u_x + u_y = 2(x+y)u$

۲۷ معادلات زیر را به کمک معادلات لاگرانژ[۵] حل نمائید:

۲۷-۱ $u_x + u_y = u$

۲۷-۲ $yu_y - xu_x = u$

۲۷-۳ $u_x + 2u_y = x$

۲۷-۴ $xu_x + yu_y = xyu$

۲۷-۵ $(y-u)u_x + (x-y)u_y - u = -x$

۲۷-۶ $(y-z)u_x + (z-x)u_y + (x-y)u_z = 0$

---

[۴] Lagrange

[۵] Lagrange

۲۷–۷ $u_x + 2u_y = x - y$

۲۷–۸ $u_x + 2u_y = e^{y-2x}$

۲۷–۹ $xu_x + yu_y + zu_z = xyz$

۲۷–۱۰ $u_x + xu_y + xyu_z = xyzu$

۲۷–۱۱ $x(y-u)u_x + y(u-x)u_y = u(x-y)$

۲۷–۱۲ $yu_x - xu_y = x^3y + xy^3$

۲۸ معادلات زیر را بر اساس تغییر متغیر[۶] خواسته شده حل نمائید:

۲۸–۱ $u_{xy} + u_x = 0, \quad u_x := p$

۲۸–۲ $u_{xy} + u_y = 0, \quad u_y := p$

۲۸–۳ $u_{yy} - u_y = 0, \quad u_y := p$

۲۸–۴ $u_{xyy} + u_x = 0, \quad u_x := p$

۲۸–۵ $u_{tt} = c^2u_{xx}, \quad r := x + tc, \quad s := x - tc$

۲۸–۶ $u_{xx} + u_{xy} = 2u_{yy}, \quad r := x + y, \quad s := 2x - y \quad \Rightarrow u_{rs} = 0$

۲۸–۷ $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0, \quad r := y, \quad s := x + y \quad \Rightarrow u_{rr} = 0$

۲۸–۸ $xu_{xx} + u_x = yu_{xy}, \quad r := y, \quad s := xy \quad \Rightarrow u_{sr} = 0$

۲۹ معادلات زیر را با تبدیل به فرم استاندارد حل نمائید:

۲۹–۱ $2xu_{xx} - yu_{xy} + 2u_x = 4xy^2$

۲۹–۲ $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0$

۳۰ معادلات زیر را به کمک تبدیل فوریه[۷] حل نمائید:

[۶] Substitutions

[۷] Fourier Transform

۳۰-۱ $u_{xx} + u_{xy} = \cos(x + ۲y)$

۳۱ سری فوریه سینوسی تابع زیر را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} -۲, & ۰ \leq x < ۱ \\ ۳, & ۱ < x \leq ۲ \end{cases}$$

۳۲ سری فوریه تابع $f(x) = |x|, \quad -۱ < x < ۱$ رابیابید. سپس مقدار عددی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^۲}$ را بدست آورید

۳۳ تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید:

$$f(x) = \begin{cases} ۱, & |x| < ۲ \\ ۰, & |x| > ۲ \end{cases}$$

و به کمک آن حاصل های زیر را بیابید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2w}{w} dw, \quad \int_0^\infty \frac{\cos w \sin w}{w} dw, \quad \int_0^\infty \frac{\sin w}{w} dw$$

۳۴ مسئله موج یک بعدی متناهی با شرایط ناهمگن زیر را به معادله موج یک بعدی متناهی با شرایط همگن تبدیل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = xt, & ۰ < x < ۱, \quad t > ۰ \\ \begin{cases} u(x,۰) = ۰, \\ u_t(x,۰) = x + ۱, \end{cases} \\ \begin{cases} u(۰,t) = ۱ - t, \\ u_x(۱,t) = ۱ + t, \end{cases} \end{cases}$$

۳۵ سری فوریه تابع زیر را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} -۳x, & -\pi \leq x < ۰ \\ ۳x, & ۰ < x \leq \pi \end{cases}$$

۳۶ سری فوریه تابع $f(x) = |x|, \quad -1 < x < 1$ رابیابید. سپس با مشتق گیری از آن مقدار عددی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ را بدست آورید

۳۷ با استفاده از انتگرال فوریه نشان دهید:

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$$

سپس حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید:

$$\int_0^\infty \frac{\cos w \sin w}{w} dw, \quad \int_0^\infty \frac{\sin 2w}{w} dw, \quad \int_0^\infty \frac{\sin w}{w} dw$$

۳۷ نشان دهید تابع $u(x,y) = e^x \sin y$ همساز می‌باشد،

۳۸ نشان دهید تابع $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ همساز می‌باشد، سپس مزدوج همساز آنرا بیابید.

۳۹ نشان دهید تابع $u(x,y) = x + e^x \cos y$ همساز می‌باشد، سپس مزدوج همساز آنرا بیابید.

۴۰ نشان دهید تابع $u(x,y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$ همساز می‌باشد، سپس مزدوج همساز آنرا بیابید.

۴۱ نشان دهید تابع $u(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ همساز می‌باشد، سپس مزدوج همساز آنرا بیابید.

۴۲ نشان دهید تابع $u(x,y) = e^x(x \sin y - y \cos y)$ همساز می‌باشد، سپس مزدوج همساز آنرا بیابید.

۴۳ نشان دهید تابع $u(x,y) = a \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ همساز می‌باشد، سپس مزدوج همساز آنرا بیابید.

۴۳ آیا تابع $f(z) = zIm(z)$ در معادلات کشی ریمان صدق می‌کند.

فصل ۸

تمرینات حل شده ریاضی مهندسی

تبصره ۳.۰.۸. فرض کنید $\frac{du}{c} = \frac{dy}{b} = \frac{dx}{a}$ اگر $a + b + c = ۰$ آنگاه $dx + dy + du = ۰$.

حل. فرض کنید $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} := kdz$

$$dx = kadz, dy = kbdz, du = kcdzdx + dy + du = k(a + b + c)dz = 0.$$

۱.۸ مسائلی در ریاضی مهندسی

(الف) $u_y + x^۲u = ۳x^۲$ فاقد u_x:

حل.

$$u = e^{-\int x^2dy}(\int 3x^2e^{\int x^2dy}dy + h(x)).$$

(ب) $u_x + ۲x = y^۲$ فاقد u_y:

حل.

$$u_x = y^2 - 2xu = \int (y^2 - 2x)dx + h(y).$$

(ج) $u_{xx} - ۴u = ۰$ فاقد u_y, u_{yy}

حل.

$$m^2 - 4 = 0m = \pm 2u = A(y)e^{2x} + B(y)e^{-2x}.$$

۲.۸ روش لاگرانژ

د) $x^{۲}u_x + y^{۲}u_y = (x+y)u$

حل.

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{du}{(x+y)u}$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = c_1$$

$$\frac{-dx}{-x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{(x-y)\frac{du}{u}}{(x^2-y^2)}$$

بنا به تبصره ۸.۰.۳،

$$-dx + dy + (x-y)\frac{du}{u} = 0\frac{dx-dy}{x-y} = \frac{du}{u}c_2 = \frac{x-y}{u}.$$

$$\forall\varphi \quad \varphi(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \frac{x-y}{u}) = 0.$$

ه) $u_x + u_y = u$

حل.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{u}$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1}x - y = c_1,$$

$$\frac{dy}{1} = \frac{du}{u}y - \ln u = c_2,$$

$$\forall\varphi \quad \varphi(x-y, y-\ln u) = 0.$$

و) $yu_y - xu_x = u$

حل.

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u}$$

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y}xy = c_1,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u}\frac{u}{y} = c_2,$$

$$\forall\varphi \quad \varphi(xy, \frac{u}{y}) = 0.$$

ز) $u_x + ۲u_y = x$

حل.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{x}$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} 2x - y = c_1,$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{x} \frac{x^2}{2} - u = c_2,$$

$$\forall \varphi \quad \varphi(2x - y, \frac{x^2}{2} - u) = 0.$$

ح) $xu_x + yu_y = xyu$

حل.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{xyu}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \frac{y}{x} = c_1,$$

$$\frac{ydx}{xy} = \frac{xdy}{xy} = \frac{-2\frac{du}{u}}{-2xy} d(xy) - 2du/u = 0xy - 2\ln u = c_2,$$

$$\forall \varphi \quad \varphi(\frac{y}{x}, xy - 2\ln u) = 0.$$

ط) $(y - u)u_x + (x - y)u_y - u = -x$

حل.

$$\frac{dx}{y - u} = \frac{dy}{x - y} = \frac{du}{u - x} dx + dy + du = 0x + y + u = c_1,$$

$$\frac{xdx}{x(y - u))} = \frac{udy}{u(x - y)} = \frac{ydu}{y(u - x)} xdx + d(uy) = 0x^2 + 2yu = c_2,$$

$$\forall \varphi \quad \varphi(x + y + u, x^2 + 2yu) = 0.$$

ی) $u_x + u_y = ۲(x + y)u$

حل.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{2(x + y)u}$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} x - y = c_1,$$

$$\frac{-xdx}{-x} = \frac{-ydy}{-y} = \frac{2du/u}{x + y} - xdx - ydy + 2du/u = 0 - x^2 - y^2 + 4\ln u = c_2,$$

$$\forall \varphi \quad \varphi(x - y, -x^2 - y^2 + 4\ln u) = 0.$$

یالف) $u_x + ۲u_y = x + y$

حل.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{x+y}$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} 2x - y = c_1,$$

$$\frac{-xdx}{-x} = \frac{-2ydy}{-y} = \frac{du}{x+y} - xdx - 2ydy + du = 0 - x^2 - 2y^2 + 2u = c_2,$$

$$\forall\varphi \quad \varphi(2x - y, -x^2 - 2y^2 + 2u) = 0.$$

یب) $u_x + ۲u_y = e^{y-۲x}$

حل.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{e^{y-2x}}$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} 2x - y = c_1,$$

$$e^{2x-y}u_x + 2e^{2x-y}u_y = 1 \frac{2e^{2x-y}dx}{2} = \frac{-e^{2x-y}dy}{-1/2} = \frac{-3/2du}{-3/2}$$

$$d(e^{2x-y}) - 3/2du = 0 e^{2x-y} - 3/2u = c_2,$$

$$\forall\varphi \quad \varphi(2x - y, e^{2x-y} - 3/2u) = 0.$$

یج) $yu_x - xu_y = x^۳y + xy^۳$

حل.

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{du}{x^3y + xy^3}$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} y^2 - x^2 = c_1,$$

$$\frac{-x^3dx}{-x^3y} = \frac{y^3dy}{-xy^3} = \frac{du}{x^3y + xy^3} y^4 - x^4 + 4u = c_2$$

$$\forall\varphi \quad \varphi(y^2 - x^2, y^4 - x^4 + 4u) = 0.$$

۳.۸ لاگرانژ برای سه متغیره ها

(ید) $x(y-u)u_x + y(u-x)u_y = u(x-y)$

حل.

$$\frac{dx}{x(y-u)} = \frac{dy}{y(u-x)} = \frac{du}{u(x-y)} x+y+u = c_1$$

$$\frac{dx/x}{(y-u)} = \frac{dy/y}{(u-x)} = \frac{du/u}{(x-y)} xyu = c_2$$

$$\forall\varphi \quad \varphi(x+y+u, xyu) = 0.$$

(یه) $(y-z)u_x + (z-x)u_y + (x-y)u_z = u$

حل.

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} = \frac{du}{u}$$

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} x+y+z = c_1,$$

$$\frac{xdx}{x(y-z))} = \frac{ydy}{y(z-x)} = \frac{zdz}{z(x-y)} xdx + ydy + zdz = 0 x^2+y^2+z^2 = c_2,$$

$$\forall\varphi \quad \varphi(x+y+u, x^2+y^2+z^2, \ldots) = 0.$$

(یو) $xu_x + yu_y + zu_z = xyz$

حل.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{xyz}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} c_1 = \frac{x}{y}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} c_2 = \frac{x}{z}$$

$$\frac{yzdx}{xyz} = \frac{xzdy}{xyz} = \frac{xydz}{xyz} = \frac{-3du}{-3xyz} d(xyz) - 3du = 0 xyz - 3u = c_3$$

$$\forall\varphi \quad \varphi(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}, xyz-3u) = 0.$$

یز) $u_x + xu_y + xyu_z = xyzu$

حل.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{xy} = \frac{du}{xyzu}$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x} c_1 = x^2 - 2y$$

$$\frac{dy}{x} = \frac{dz}{xy} c_2 = y^2 - z$$

$$\frac{dz}{xy} = \frac{du}{xyzu} z^2 - \ln u = c_3$$

$$\forall\varphi \quad \varphi(x^2 - 2y, y^2 - z, z^2 - \ln u) = 0.$$

۴.۸ روش جداسازی متغیرها

یح) $xu_x - yu_y = ۰$ فرض کنید $u = f(x)g(y)$

حل.

$$xf'g = yfg' x\frac{f'}{f} = y\frac{g'}{g} := k = constant$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{k}{x} f(x) = c_1 x^k$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{k}{y} g(y) = c_2 y^k$$

$$u = fg = a(xy)^k.$$

یط) $yu_x - xu_y = ۰$ فرض کنید $u = f(x)g(y)$

حل.

$$yf'g = xfg' \frac{f'}{xf} = \frac{g'}{yg} := k = constant$$

$$\frac{f'}{f} = kx f(x) = c_1 e^{\frac{k}{2}x^2}$$

$$\frac{g'}{g} = ky g(y) = c_2 e^{\frac{k}{2}y^2}$$

$$u = fg = ae^{\frac{k}{2}(x^2+y^2)}.$$

ک) $u_x + u_y = ۰$ فرض کنید $u = f(x)g(y)$

حل.

$$f'g + fg' = 0\frac{f'}{f} = \frac{-g'}{g} := k = constant$$

$$\frac{f'}{f} = kf(x) = c_1e^{kx}$$

$$\frac{-g'}{g} = kg(y) = c_2e^{-ky}$$

$$u = fg = ae^{k(x-y)}.$$

کالف) $u_{xy} + u_y = ۰$ فرض کنید $u = f(x)g(y)$

حل.

$$f'g^o + fg^o = 0\frac{f'}{f} = -1 \quad \& \quad g^o = 0$$

$$f(x) = ae^{-x} \quad g(y) = b$$

$$u = fg = ce^{-x}.$$

کب) $xu_{xy} - u_y = ۳y^۲$ فرض کنید $u = f(x)g(y)$

حل.

$$xf'g^o - fg^o = 3y^2xf' - f = \frac{3y^2}{g^o} = k = constsnt$$

$$xf' - f = k \quad \& \quad \frac{3y^2}{g^o} = k$$

$$f' - \frac{f}{x} = kf = e^{\int \frac{dx}{x}}(\int \frac{k}{x}e^{-\int \frac{dx}{x}}dx + c_1)f(x) = c_1x - k$$

$$\frac{3y^2}{g^o} = kg(y) = \frac{y^3}{k} + c_2.$$

$$u = f(x)g(y) = (c_1x - k)(\frac{y^3}{k} + c_2).$$

۵.۸ تغییر متغیر

کج) $u_{tt}=c^{۲}u_{xx}$ فرض کنید $v=x+tc, z=x-tc$

حل.

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_v v_t + u_z z_t \\
&= u_v c - u_z c \\
u_{tt} &= c(u_v - u_z)_t \\
&= c(u_v-u_z)_v v_t + c(u_v-u_z)_z z_t \\
&= c^{۲}(u_{vv} - ۲u_{zv} + u_{zz}) \\
u_x &= u_v v_x + u_z z_x \\
&= u_v + u_z \\
u_{xx} &= (u_v+u_z)_v v_x + (u_v+u_z)_z z_x \\
&= u_{vv} + ۲u_{zv} + u_{zz}
\end{aligned}
$$

$$u_{tt}=c^2u_{xx}4u_{vz}=0u_v=h(v)$$

$$u=f(v)+g(z)u=f(x+tc)+g(x-tc).$$

کد) $u_{xy}+u_x=۰$ با $u_x:=p$

حل.

$$u_{xy}+u_x=0p_y+p=0p=e^{-y}A(x)u_x=A(x)e^{-y}u=f(x)e^{-y}+g(y).$$

که) $u_{xy}+u_y=۰$ با $u_y:=p$

حل.

$$p_x+p=0p=f(y)e^{-x}u=p=f(y)e^{-x}u=g(y)e^{-x}+h(x).$$

کو) $xu_{xy}-u_y=۳y^{۲}$ با $u_y:=p$

حل.

$$xp_x-p=3y^2p_x-\frac{p}{x}=\frac{3y^2}{x}$$

$$p = e^{-\int \frac{dx}{x}}(\int \frac{3y^2}{x} e^{\int \frac{dx}{x}} dx + h(y)) p = \frac{1}{x}(y^3 + h(y)) \quad \& \quad u_y = p$$

$$u = \frac{1}{x}(y^4/4 + f(y)), f(y) = \int h(y) dy.$$

منابع

[۱] ریاضی مهندسی، خدیجه حسینی چهرقانی و زینب طوفانی، انتشارات آتی نگر، ۱۳۹۰.

[۲] http://fa.wikipedia.org/wiki/ _.

[۳] http://en.wikipedia.org/wiki/Holomorphic_function.